Fullér Róbert kutatási eredményei: 1989-1997

1 Előszó

Az 1989 óta publikált cikkeimre több mint 110 hivatkozásom van majdnem teljes egészében külföldi tudósok által. A hivatkozásaim több mint a fele olyan munkákból származik, ahol az eredményeimet általánosították, megjavították vagy felhasználták újabb tételek bizonyításában. A *Mathematical Review*-ban az *Author Lookup* alapján 24, 1989 óta publikált, cikkem van *review*-volva.

Az eredményeimet a cikkeim alapján és időrendi sorrendben részletezem, külön kitérek arra, hogy a későbbiek folyamán kik általánosították és javították meg őket. Magyar nyelven 1984 óta ez az első munkám, és az egyértelműség kedvéért néha zárójelben jegyzem meg az angol megfelelőt.

Az eredményeimet hét szekcióban ismertetem.

2 Fuzzy halmazok

A *fuzzy* halmazokat Lotfi A. Zadeh vezette be 1965-ben [59] mint a pontatlanul rendelkezésre álló adatok reprezentálási és a manipulálási eszközeit.

Definició 2.1 *[59] Legyen $X \neq \emptyset$ egy tetszőleges halmaz. Az X halmaz egy A fuzzy részhalmazát a μ_A-val jelölt tartalmazási függvényével karakterizálhatjuk, ahol*

$$\mu_A \colon X \to [0, 1]$$

és $\mu_A(x)$ úgy van interpretálva mint az x elemnek az A-hoz való tartozásának a mértéke, minden $x \in X$ esetén.

Ha valamilyen $y \in X$ elemre $\mu_A(y) = 0$ akkor azt mondjuk, hogy y nulla mértékkel tartozik bele az A fuzzy halmazba. Ha $\mu_A(y) = 1$ akkor azt mondjuk, hogy y teljes mértékkel tartozik bele, egyébként un. közbülső (*intermediate degree of membership*) beletartozásról beszélünk.

Úgy is lehet mondani, hogy $\mu_A(x)$ azt mutatja meg, hogy az adott $x \in X$ elem mennyire rendelkezik az A által leirt tulajdonsággal. A fuzzy halmazok tehát olyan tulajdonságok leírására szolgálnak amelyeket nem lehet karakterizálni a klasszikus *eleme*, $\in$, relációval, azaz a kétértékű logika - igen/nem - segítségével.

Az egyszerűség kedvéért $\mu_A(x)$ helyett legtöbbször csak $A(x)$-et fogunk írni, és sokszor (főleg fuzzy lineáris programozási feladatokban) használjuk az $\tilde{A}$ jelölést a

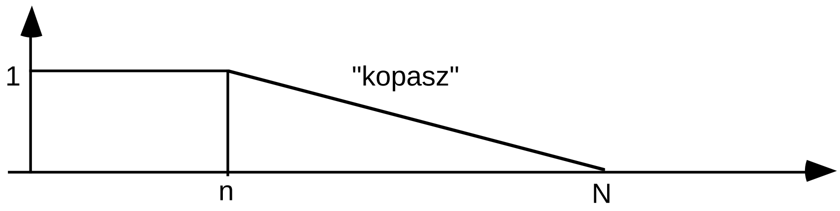

Figure 1: A ”kopaszság” egy lehetséges reprezentációja.

valós számoktól való megkülönböztetés céljából. Az X halmaz fuzzy (rész)halmazainak a családját $\mathcal{F}(X)$-el jelöljük.

Tipikus példa az, hogy mennyi hajszál elvesztése esetén mondjuk azt valakire, hogy *kopasz*. Nyilván, ha egy eredetileg dúshajú ember elveszt egy hajszálat, akkor még ezáltal nem válik kopasszá. A kopaszodás folyamata egy időben lejátszódó folyamat amely eredményeképpen valaki dúshajuból átmegy kopaszba. Ahogy a folyamat halad előre az időben és egyre kevesebb hajszállal rendelkezik az illető, egyre inkább nagyobb lesz neki a kopaszok fuzzy halmazába való tartozásának a mértéke. A Figure 1-en látható, hogy hogyan megy át fokozatosan a mennyiség (azaz a több és több hajveszteség) új minőségbe (kopaszság).

Az 1-es ábrán látható megközelítés szerint, ha valakinek N-nél több hajszála van, akkor a kopaszságának a mértéke nulla, ha n-nél kevesebb hajszála van, akkor már egy mértekkel tekintjük kopasznak, ha a hajszálainak a száma n és N között van, akkor pedig egy lineáris függvény segítségével mondjuk meg, hogy mennyire tekintjük kopasznak. Pontosabban,

$$\mu_{\text{kopasz}}(v) = \begin{cases} 1 & \text{ha } v < n \\ 1 - \frac{N-v}{N-n} & \text{ha } 1 \le v \le N \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

ahol $\mu_{\text{kopasz}}(v)$ definiálja a v hajszállal rendelkező egyén kopaszságának a mértékét.

Nyilván, nem szükségszerű, hogy μ_{kopasz} lineáris legyen az $[n, N]$ intervallumon, a lényeg az azon van, hogy monoton csökkenő függvény legyen ott.

Másik példaként vegyük azt a tulajdonságot, hogy ”x értéke közel van egyhez”. Egy lehetéges tartalmazási függvény ami ennek a tulajdonságnak a birtoklását leírja (lásd 2-es ábra) a következő

$$A(x) = \exp(-\beta(x-1)^2)$$

ahol $\beta > 0$. Nyilván nem szükséges, hogy Gauss-típusu legyen a tartalmazási függvény, de akárhogy is definiáljuk szigorúan unimodálisnak kell lennie, azaz

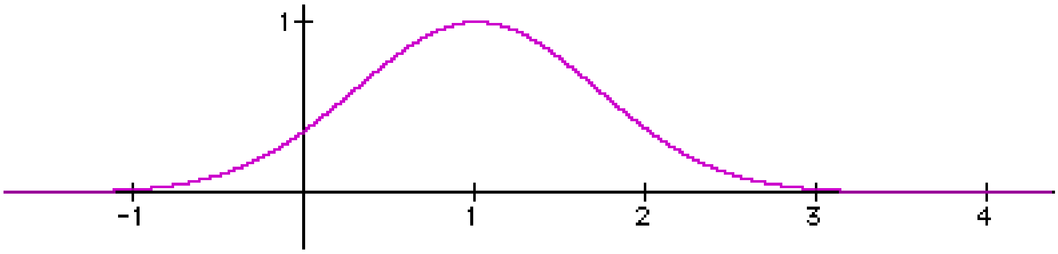

Figure 2: Egy tartalmazási függvény az ”x értéke közel van egyhez” fuzzy halmaz számára.

csak a $x = 1$ helyen lehet az értéke egy.

3 Meghatározások

Addig, amíg másként nem mondom, csak az $X = \mathbb{R}^n$-beli fuzzy halmazazokról van szó.

Definició 3.1 *Az X halmaz egy A fuzzy (rész)halmazát* normálinak *nevezzük, ha*

$$\exists x \in X : A(x) = 1.$$

Ellenkező esteben az A-t szubnormálisnak hívjuk.

Az, hogy egy fuzzy halmaz normális azt jelenti, hogy van olyan elem amelyik teljes mértékben rendelkezik azzal a tulajdonsággal amit A képvisel.

Definició 3.2 *Az X halmaz egy A fuzzy halmazának a tartója*

$$\textit{supp}(A) = \{t \in X | A(t) > 0\}.$$

Definició 3.3 *Az X halmaz egy A fuzzy halmazának az α-szinthalmaza az*

$$[A]^\alpha = \begin{cases} \{t \in X | A(t) \geq \alpha\} & \textit{ha } \alpha > 0 \\ cl(\textit{supp}A) & \textit{ha } \alpha = 0 \end{cases}$$

ahol $cl(\textit{supp}A)$ jelöli az A tartójának a lezárását.

Egy α-szinthalmazba azok az X-beli elemek tartoznak bele, amelyek legalább α mértékig rendelkeznek az A tulajdonsággal.

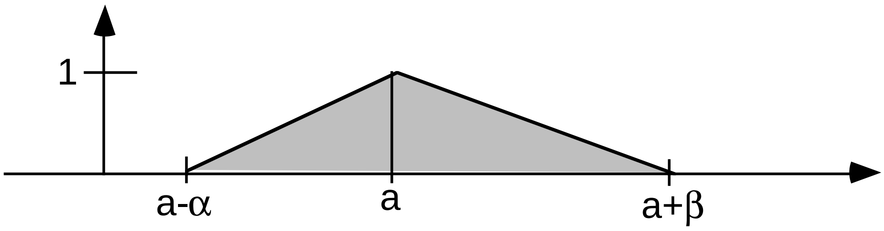

Figure 3: háromszögalakú fuzzy szám.

Definició 3.4 *Az valós számok egy A fuzzy halmazát* fuzzy számnak *nevezzük, ha a tartalmazási függvénye normális, unimodális, folytonos és korlátos tartóju. A fuzzy számok halmazát $\mathcal{F}$-el jelöljük.*

Definició 3.5 *Az $A \in \mathcal{F}$ fuzzy számot* háromszögalakú *fuzzy számnak nevezzük, ha tartalmazási függvénye a következő alakú (lásd 3-as ábra)*

$$A(t) = \begin{cases} 1 - (a-t)/\alpha & \text{ha } a - \alpha \le t \le a \\ 1 - (t-a)/\beta & \text{ha } a \le t \le a + \beta \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ahol $a \in \mathbb{R}$ az A középpontja, $\alpha > 0$ a baloldali szélessége, és $\beta > 0$ a jobboldali szélessége. Ilyenkor használjuk az

$$A = (a, \alpha, \beta).$$

jelölést. Továbbá, ha $\alpha = \beta$, akkor szimmetrikus háromszögalakú fuzzy számról van szó és használjuk a

$$A = (a, \alpha).$$

jelölést.

Egy a középponttal rendelkező fuzzy számot úgy lehet interpretálni, mint az

”x értéke közel van a-hoz”.

tulajdonság egy lehetséges reprezentációját.

Definició 3.6 *Az $A \in \mathcal{F}$ fuzzy számot* trapéz alakú *fuzzy számnak nevezzük, ha*

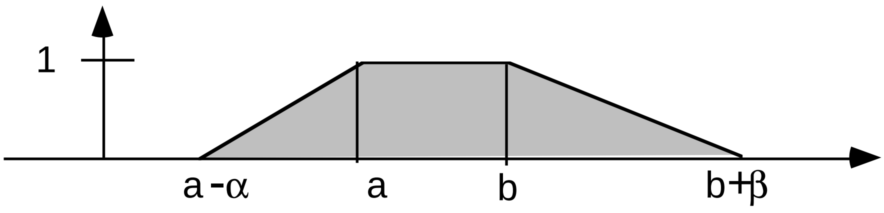

Figure 4: Trapéz alakú fuzzy szám.

tartalmazási függvénye a következő alakú (lásd 4-es ábra)

$$A(t) = \begin{cases} 1 - (a-t)/\alpha & \textit{ha } a - \alpha \le t \le a \\ 1 & \textit{ha } a \le t \le b \\ 1 - (t-b)/\beta & \textit{ha } a \le t \le b + \beta \\ 0 & \textit{otherwise} \end{cases}$$

ahol $[a, b]$ *(*$a < b$*) az* A *tolerancia intervalluma (vagy teteje),* α *a baloldali szélessége és* β *a jobboldali szélessége. Ilyenkor használjuk az*

$$A = (a, b, \alpha, \beta)$$

jelölést. Ha szimmetrikus trapéz alakú fuzzy számról van szó, akkor használni fogjuk az

$$A = (a - \theta, a + \theta, a - \theta - \alpha, a + \theta + \alpha), \tag{1}$$

előállítást, ahol a *a centrum,* $[a - \theta, a + \theta]$ *a felső szélesség,* $[a - \theta - \alpha, a + \theta + \alpha]$ *pedig az alsó szélességét jelöli a trapéznak.*

Egy $[a, b]$ tolerancia intervallumu fuzzy számot úgy lehet interpretálni, mint az

”x értéke megközelítően az $[a, b]$ intervallumba esik”

tulajdonság egy lehetséges reprezentációját.

Definició 3.7 *Minden* $A \in \mathcal{F}$ *felírható*

$$A(t) = \begin{cases} L\left(\dfrac{a-t}{\alpha}\right) & \textit{if } t \in [a - \alpha, a] \\ 1 & \textit{if } t \in [a, b] \\ R\left(\dfrac{t-b)}{\beta}\right) & \textit{if } t \in [b, b + \beta] \\ 0 & \textit{otherwise} \end{cases}$$

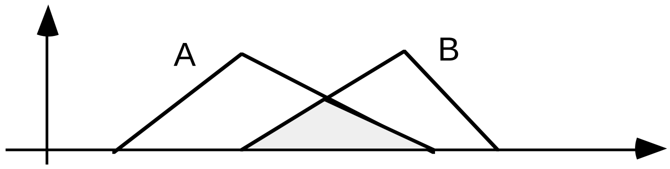

Figure 5: Két háromszögalakú fuzzy szám metszete.

formában, ahol $[a, b]$ *az* A *csúcsa (vagy magja),*

$$L\colon [0,1] \to [0,1], \quad R\colon [0,1] \to [0,1]$$

folytonos, nemnövekvő függvények, amelyek kielégítik a $L(0) = R(0) = 1$ *és* $R(1) = L(1) = 0$ *peremfeltételeket. Az ilyen fuzzy számokat* LR*-típusu fuzzy számoknak hívjuk és használjuk az*

$$A = (a, b, \alpha, \beta)_{LR}$$

jelölést.

Definició 3.8 *Legyenek* A *és* B *az* X *fuzzy halmazai. Ekkor a tartalmazási függvényeik alsó burkolóját*

$$(A \cap B)(t) = \min\{A(t), B(t)\} = A(t) \wedge B(t), \; \forall t \in X,$$

az A *és* B *metszetének hívjuk.*

Definició 3.9 *Az* A *és* B *fuzzy halmazok uniója következő*

$$(A \cup B)(t) = \max\{A(t), B(t)\} = A(t) \vee B(t), \; \forall t \in X$$

azaz az unió tartalmazási függvénye a két tartalmazási függvény felső burkolója.

Definició 3.10 *Az* A *fuzzy halmaz komplementere a* $\neg A$*-val jelölt fuzzy halmaz, ahol*

$$(\neg A)(t) = 1 - A(t), \; \forall t \in X.$$

A trianguláris normákat Schweizer és Sklar [56] vezették be 1963-ban a probabilisztikus metrikus terekben a távolság modellezésére. A fuzzy halmazok elméletében a trianguláris normákat a logikai ”és” művelet modellezésére használjuk.

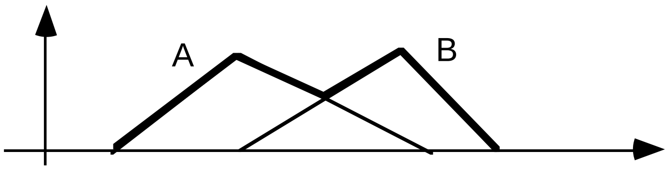

Figure 6: Két háromszögalakú fuzzy szám uniója.

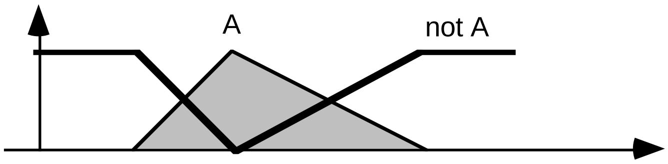

Figure 7: A és a komplementere.

Definició 3.11 *A*

$$T\colon [0,1] \times [0,1] \to [0,1],$$

függvényt trianguláris normának (t-norma röviden) hívjuk, ha T szimmetrikus, asszociativ, nem-csökkenő mindegyik változójában és $T(a,1) = a$, minden $a \in [0,1]$. Más szóval minden T t-norma kielégíti a következő tulajdonságokat

$T(x,y) = T(y,x)$, $\quad T(x,T(y,z)) = T(T(x,y),z)$

$T(x,y) \leq T(x',y')$ *ha* $x \leq x'$ *és* $y \leq y'$, $\quad T(x,1) = x$, $\forall x \in [0,1]$.

A következő táblázat a leggyakrabban használt t-normákat foglalja össze.

minimum	$MIN(a,b) = \min\{a,b\}$
Łukasiewicz	$LAND(a,b) = \max\{a+b-1,0\}$
szorzat	$PAND(a,b) = ab$ (néha probabilisztikusnak is nevezik)
gyenge	$WEAK(a,b) = \begin{cases} \min\{a,b\} & \text{ha } \max\{a,b\} = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$
Hamacher	$HAND_\gamma(a,b) = \frac{ab}{\gamma+(1-\gamma)(a+b-ab)},\ \gamma \geq 0$
Yager	$YAND_p(a,b) = 1 - \min\{1, [(1-a)^p + (1-b)^p]^{1/p}\},\ p > 0$

Az asszociativitás miatt minden t-norma kiterjeszthető kettőnél több argumentumra is. A t-normát szigorúnak hívjuk, ha szigorúan növekszik mindkét változójában.

A t-normák összességéből fontos szerepet játszanak a folytonos, archimédeszi tulajdonsággal rendelkezők. Egy T t-norma archimédeszi, ha $T(x,x) < x, \forall x \in (0,1)$. Ekkor érvényes Schweizer és Sklár reprezentációs tétele:

Tétel 3.1 *[56] Egy T t-norma pontosan akkor folytonos és archimédeszi, ha van olyan $f\colon [0,1] \to [0,\infty]$ szigorúan csökkenő, folytonos függvény, melyre $f(1) = 0$ és érvényes a*

$$T(a,b) = f^{[-1]}(f(a) + f(b)) \tag{2}$$

egyenlőség, ahol $f^{[-1]}$ jelöli az f függvény pszeudoinverzét, azaz

$$f^{[-1]}(y) = \begin{cases} f^{-1}(y) & \text{ha } y \in [0, f(0)] \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

Ilyenkor f-et a T additiv generátorának hívjuk.

E reprezentációs tétel gyakorlati haszna abban rejlik, hogy segítségével a különböző számolások viszonylag egyszerűen elvégezhetők.

Definició 3.12 *Legyenek T_1 és T_2 t-normák. Azt mondjuk, hogy T_1 gyengébb mint T_2 ha fennáll a*

$$T_1(x,y) \leq T_2(x,y)$$

összefüggés minden $x, y \in [0,1]$ esetén. Ilyenkor használjuk a $T_1 \leq T_2$ jelölést.

A fuzzy halmazok elméletében a trianguláris konormákat a logikai "*vagy*" művelet modellezésére használjuk.

Definició 3.13 *Az*

$$S\colon [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$$

leképezést trianguláris komplementáris normának (t-konorm röviden), ha S szimmetrikus, asszociativ, nem-csökkenő mindegyik változójában és $S(a,0) = a$, minden $a \in [0,1]$. Azaz S kielégiti a következőket,

$$S(x,y) = S(y,x), \quad S(x, S(y,z)) = S(S(x,y),z),$$

$$S(x,y) \leq S(x',y') \text{ ha } x \leq x' \text{ és } y \leq y', \quad S(x,0) = x, \ \forall x \in [0,1].$$

A következő táblázat a leggyakrabban használt t-konormákat foglalja össze.

maximum	$MAX(a,b) = \max\{a,b\}$
Łukasiewicz	$LOR(a,b) = \min\{a+b,1\}$
szorzat	$POR(a,b) = a+b-ab$
erős	$STRONG(a,b) = \begin{cases} \max\{a,b\} & \text{ha } \min\{a,b\}=0 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$
Hamacher	$HOR_\gamma(x,y) = \frac{a+b-(2-\gamma)ab}{1-(1-\gamma)ab},\ \gamma \geq 0$
Yager	$YOR_p(a,b) = \min\{1, \sqrt[p]{a^p+b^p}\},\ p>0$

Definició 3.14 *Legyen T egy t-norma. Ha az S függvényt úgy definiáljuk, hogy*

$$S(x,y) = 1 - T(1-x, 1-y),\ x,y \in [0,1],$$

akkor S t-konorma lesz, és azt mondjuk, hogy S-et a T-ből származtatottuk.

Definició 3.15 *Legyenek $A \in \mathcal{F}(X)$ és $B \in \mathcal{F}(Y)$ fuzzy halmazok. Ekkor az ”A maga után vonja B” (röviden $A \to B$) relációt - a klasszikus implikáció reláció kiterjesztését - mint az $X \times Y$ fuzzy halmazát értelmezzük, úgy hogy*

$$(A \to B)(u,v) = I(A(u), B(v)),\ \forall u \in X, v \in Y.$$

ahol I valamilyen függvény, amely eleget tesz bizonyos tulajdonságoknak (amik garantálják, hogy klasszikus implikáció egy korrekt kiterjesztését kapjuk).

Példa 3.1 *A következő két fuzzy implikációs használni fogjuk*

$$x \to y = \max\{1-x, y\} \text{ Kleene-Dienes implikáció)} \tag{3}$$

$$x \to y = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \leq y \\ y & \text{különben} \end{cases} \quad \text{(Gödel implikáció)} \tag{4}$$

Definició 3.16 *Legyenek A és B az X halmaz fuzzy halmazai és legyen T t-norma. Akkor A és B-nek a T-metszete a következő*

$$(A \cap B)(t) = T(A(t), B(t)),\ \forall t \in X, \tag{5}$$

Definició 3.17 *Legyen S t-konorma. Az A és B fuzzy halmazok S-uniója a következő*

$$(A \cup B)(t) = S(A(t), B(t)),\ \forall t \in X$$

A klasszikus függvényeket a Zadeh-féle kiterjesztési elv [59] szerint terjeszthetjük ki fuzzy terekre.

Definició 3.18 *Legyenek X és Y klasszikus halmazok és legyen $f\colon X \to Y$. A Zadeh-féle kiterjesztési elv alapján az f kiterjesztettje (amit szintén f-el jelölünk) az X és az Y fuzzy halmazai között operál, azaz*

$$f\colon \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y),$$

és ha $A \in \mathcal{F}(X)$, akkor $f(A)$-t a következő formula alapján határozzuk meg

$$f(A)(y) = \begin{cases} \sup_{x \in f^{-1}(y)} A(x) & \textit{ha } f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & \textit{egyébként} \end{cases} \tag{6}$$

ahol $f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$.

A kiterjesztési elvet n-változós függvényekre is lehet általánosítani.

Definició 3.19 *(n-változós függvények sup-min kiterjesztési elve) Legyenek X_1, $X_2, \dots, X_n$ és Y nemüres halmazok. Legyen továbbá*

$$f\colon X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \to Y.$$

Legyen $A_i \in \mathcal{F}(X_i)$, $1 \le i \le n$, ekkor az $f(A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{F}(Y)$ tartalmazási függvénye a következő

$$f(A_1, \dots, A_n)(y) =$$

$$\begin{cases} \sup\{\min\{A_1(x_1), \dots, A_n(x_n)\} \mid x \in f^{-1}(y)\} & \textit{ha } f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & \textit{egyébként} \end{cases} \tag{7}$$

Speciálisan, $n = 2$-re a következő formulát kapjuk

$$f(A_1, A_2)(y) = \sup\{A_1(x_1) \wedge A_2(x_2) \mid f(x_1, x_2) = y\}$$

feltételezve, hogy az üres halmazon vett szuprémum értéke az nulla.

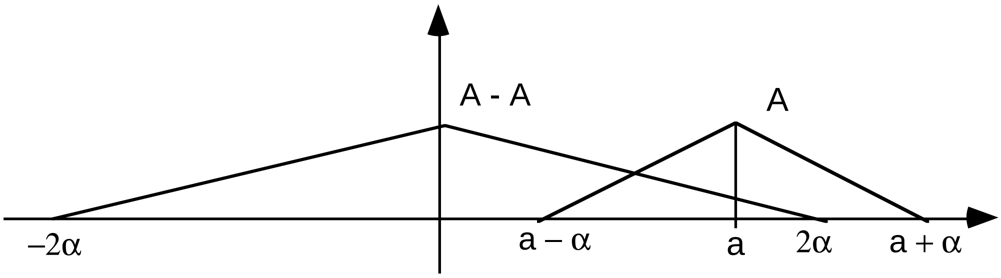

Figure 8: Az $A - A$ fuzzy halmaz tartalmazási függvénye.

Példa 3.2 *Legyen $f\colon X \times X \to X$ az összeadás művelete X-en, azaz $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. Ha A_1 és A_2 az X fuzzy halmazai, akkor a kiterjesztési elv szerint*

$$f(A_1, A_2)(y) = \sup_{x_1 + x_2 = y} \min\{A_1(x_1), A_2(x_2)\}$$

és ilyenkor használjuk a

$$f(A_1, A_2) = A_1 + A_2$$

jelölést.

Példa 3.3 *Legyen $f\colon X \times X \to X$ a kivonás művelete X-en, azaz $f(x_1, x_2) = x_1 - x_2$. Ha A_1 és A_2 az X fuzzy halmazai, akkor a kiterjesztési elv szerint*

$$f(A_1, A_2)(y) = \sup_{x_1 - x_2 = y} \min\{A_1(x_1), A_2(x_2)\}$$

és ilyenkor használjuk az

$$f(A_1, A_2) = A_1 - A_2$$

jelölést.

Meg kell jegyezni, hogy ha $A \in \mathcal{F}$, akkor

$$(A - A)(y) = \sup_{x_1 - x_2 = y} \min\{A(x_1), A(x_2)\},\ y \in \mathbb{R}$$

azaz $A - A \neq \hat{0}$, ahol $\hat{0}$ jelöli a nulla karakterisztikus függvényét ($\hat{0}(t) = 1$ ha $t = 0$ és $\hat{0}(t) = 0$ egyébként).

Példa 3.4 *Legyen* $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, úgy hogy* $f(x_1, x_2) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$*, ahol* λ_1 *és* λ_2 *valós konstansok. Feltéve, hogy* $A_1, A_2 \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$*, a kiterjesztési elv alapján azt kapjuk, hogy*

$$f(A_1, A_2)(y) = \sup_{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = y} \min\{A_1(x_1), A_2(x_2)\}$$

és használjuk az

$$f(A_1, A_2) = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2$$

jelölést.

Legyenek $A = (a_1, a_2, \alpha_1, \alpha_2)_{LR}$ és $B = (b_1, b_2, \beta_1, \beta_2)_{LR}$ LR-típusu fuzzy számok. A (sup-min) kiterjesztési elv segítségével be lehet bizonyítani a következő összefüggéseket

$$A + B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2)_{LR},$$

$$A - B = (a_1 - b_2, a_2 - b_1, \alpha_1 + \beta_2, \alpha_2 + \beta_1)_{LR} \tag{8}$$

továbbá, ha $\lambda \in \mathbb{R}$ valós szám, akkor λA reprezentálható mint

$$\lambda A = \begin{cases} (\lambda a_1, \lambda a_2, \alpha_1, \alpha_2)_{LR} & \text{ha } \lambda \geq 0 \\ (\lambda a_2, \lambda a_1, |\lambda|\alpha_2, |\lambda|\alpha_1)_{LR} & \text{ha } \lambda < 0 \end{cases} \tag{9}$$

Speciálisan, ha $A = (a_1, a_2, \alpha_1, \alpha_2)$ és $B = (b_1, b_2, \beta_1, \beta_2)$ trapéz alakú fuzzy számok, akkor

$$A + B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2),$$

$$A - B = (a_1 - b_2, a_2 - b_1, \alpha_1 + \beta_2, \alpha_2 + \beta_1).$$

Ha $A = (a, \alpha_1, \alpha_2)$ és $B = (b, \beta_1, \beta_2)$ háromszögalakú fuzzy számok, akkor

$$A + B = (a + b, \alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2), \quad A - B = (a - b, \alpha_1 + \beta_2, \alpha_2 + \beta_1)$$

és ha $A = (a, \alpha)$ és $B = (b, \beta)$ szimmetrikus háromszögalakú fuzzy számok, akkor

$$A + B = (a + b,\ \alpha + \beta), \quad A - B = (a - b,\ \alpha + \beta), \quad \lambda A = (\lambda a,\ |\lambda|\alpha). \tag{10}$$

A fenti eredmények általánosíthatók fuzzy számok lineáris kombinációira is. Nevezetesen,

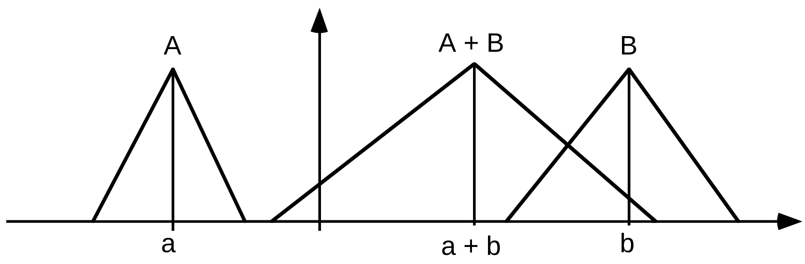

Figure 9: Két háromszögalakú fuzzy szám összege

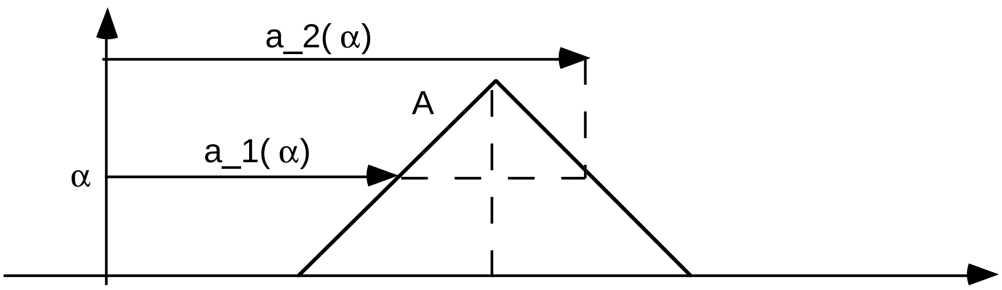

Figure 10: Az $[A]^\alpha = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)]$ illusztrálása.

Lemma 3.1 *Legyenek $A_i = (a_i, \alpha_i)$ szimmetrikus háromszögalakú fuzzy számok és $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$. Akkor az A_i-k lineáris kombinációja*

$$\sum_{i=1}^{n} A_i x_i := A_1 x_1 + \cdots + A_n x_n$$

a következőféleképpen reprezentálható

$$\sum_{i=1}^{n} A_i x_i = (a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n,\ |x_1|\alpha_1 + \cdots + |x_n|\alpha_n) \tag{11}$$

Legyenek A és B fuzzy számok és a szinthalmazaikat jelöljük úgy, hogy

$$[A]^\alpha = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)], \quad [B]^\alpha = [b_1(\alpha), b_2(\alpha)].$$

Könnyen megmutatható, hogy

$$[A + B]^\alpha = [a_1(\alpha) + b_1(\alpha), a_2(\alpha) + b_2(\alpha)], \quad [-A]^\alpha = [-a_2(\alpha), -a_1(\alpha)]$$

$$[A-B]^\alpha = [a_1(\alpha) - b_2(\alpha), a_2(\alpha) - b_1(\alpha)]$$

$$[\lambda A]^\alpha = [\lambda a_1(\alpha), \lambda a_2(\alpha)],\ \lambda \geq 0, \quad [\lambda A]^\alpha = [\lambda a_2(\alpha), \lambda a_1(\alpha)],\ \lambda < 0$$

minden $\alpha \in [0,1]$, azaz az összeg α-szinthalmaza nem más mint az összeadandók szinthalmazainak az összege.

A következő két tétel, (Nguyen, 1978) azt mutatja meg, hogy az α-szinthalmazai egy Zadeh-féle elvvel kiterjesztett fuzzy leképezésnek egyszerűen megadhatóak.

Tétel 3.2 *[55] Legyen $f\colon X \to Y$ folytonos függvény és legyen $A \in \mathcal{F}(X)$. Ekkor,*

$$[f(A)]^\alpha = f([A]^\alpha)$$

ahol $f(A) \in \mathcal{F}(Y)$ az (6) szerinti kiterjesztési elvvel van definiálva, és

$$f([A]^\alpha) = \{f(x) \,|\, x \in [A]^\alpha\}.$$

Például, ha $[A]^\alpha = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)]$ és f monoton növekedő függvény, akkor Nguyen tétele alapján

$$[f(A)]^\alpha = f([A]^\alpha) = f([a_1(\alpha), a_2(\alpha)]) = [f(a_1(\alpha)), f(a_2(\alpha))].$$

Nguyen tétele kiterjeszthető két változós függvényekre is.

Tétel 3.3 *[55] Legyenek X, Y és Z nemüres halmazok és legyen $f\colon X \times Y \to Z$ folytonos függvény. Ha $A \in \mathcal{F}(X)$ és $B \in \mathcal{F}(Y)$, akkor*

$$[f(A,B)]^\alpha = f([A]^\alpha, [B]^\alpha)$$

ahol, $f(A,B) \in \mathcal{F}(Z)$ és

$$f([A]^\alpha, [B]^\alpha) = \{f(x,y) \,|\, x \in [A]^\alpha, y \in [B]^\alpha\}.$$

Például legyen $f(x,y) = xy$, $[A]^\alpha = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)]$ és $[B]^\alpha = [b_1(\alpha), b_2(\alpha)]$. Ekkor Nguyen tétele alapján kiszámíthatjuk, hogy

$$[f(A,B)]^\alpha = f([A]^\alpha, [B]^\alpha) = [A]^\alpha[B]^\alpha.$$

Azonban a

$$[AB]^\alpha = [A]^\alpha[B]^\alpha = [a_1(\alpha)b_1(\alpha), a_2(\alpha)b_2(\alpha)]$$

egyenlőség csak akkor áll fenn, ha A és B mindketten nemnegatívok, azaz $A(x) = B(x) = 0$ minden $x \leq 0$ esetén. Egyébként az intervallumok szorzása (az intervallum aritmetika szabályai miatt) bonyolultabb formulákhoz vezet.

Zadeh kiterjesztési elvét általánosíthatjuk t-normák segítségével is, mivel a logikai *és* operátort pontosan a trianguláris normákkal modellezzük.

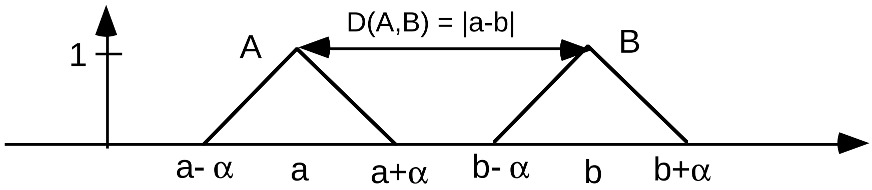

Figure 11: $A = (a, \alpha)$ és $B = (b, \alpha)$ Hausdorff távolsága.

Definició 3.20 *(n-változós függvények sup-t-norma kiterjesztési elve). Legyenek $X_1, X_2, \dots, X_n$ és Y nemüres halmazok. Legyen továbbá T egy t-norma és*

$$f\colon X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \to Y,$$

Legyen $A_i \in \mathcal{F}(X_i)$, $1 \le i \le n$, ekkor az $f(A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{F}(Y)$ tartalmazási függvénye a következő

$$f(A_1, \dots, A_n)(y) = \begin{cases} \sup\{T(A_1(x_1), \dots, A_n(x_n)) \,|\, x \in f^{-1}(y)\} & \textit{ha } f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & \textit{egyébként} \end{cases} \tag{12}$$

Tehát a minimum normát egyszerűen kicseréljük valamilyen más t-normával.

Legyen $A, B \in \mathcal{F}$, és $[A]^\alpha = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)]$ és $[B]^\alpha = [b_1(\alpha), b_2(\alpha)]$. Ekkor $\mathcal{F}$-et metrikus térré tehetjük a következő metrikákkal

- **Hausdorff távolság**

  $$D(A, B) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \max\{|a_1(\alpha) - b_1(\alpha)|, |a_2(\alpha) - b_2(\alpha)|\}. \tag{13}$$

  azaz $D(A, B)$ nem más mint az A és B α-szinthalmazainak a maximális eltérése.

- C_∞ **távolság**

  $$C_\infty(A, B) = \|\mu_A - \mu_B\|_\infty = \sup\{|\mu_A(u) - \mu_B(u)| \,:\, u \in \mathbb{R}\}.$$

  A C_∞ távolság értelmes a $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ halmazon is.

Definició 3.21 *Legyen $A, B \in \mathcal{F}$. Az "A kisebb vagy egyenlő mint B" (röviden $A \lesssim B$) állítás lehetőségének a mértéke* (the degree of possibility that the proposition "A is less or equal than B" is true)*, amit Pos$(A \le B)$-vel jelölünk, a következő*

$$\textit{Pos}(A \le B) = \sup_{x \le y} A(x) \wedge B(y). \tag{14}$$

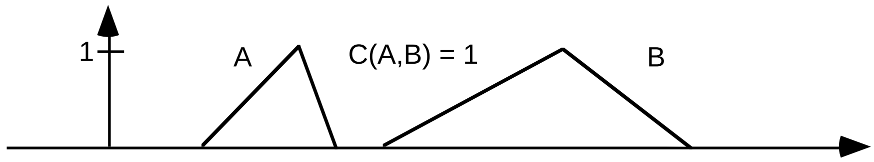

Figure 12: $C(A, B) = 1$ valahányszor A és B tartói diszjunktak.

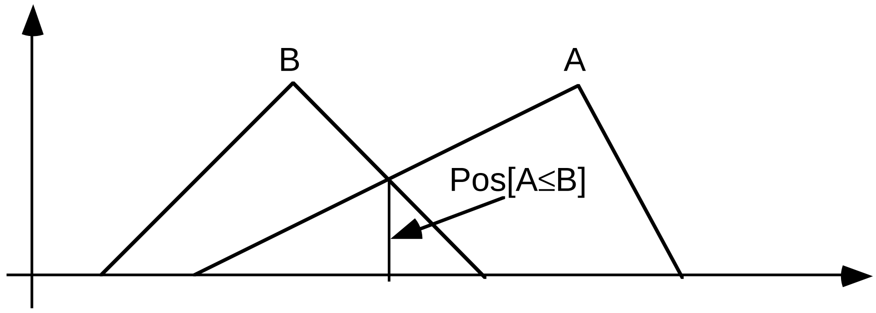

Figure 13: A fenti ábrán Pos$(B \leq A) = 1$ és Pos$(A \leq B) < 1$.

Tehát Pos$(A \leq B)$ azt mondja meg, hogy milyen mértékben tekinthető az A kisebbnek vagy egyenlőnek mint a B.

Definició 3.22 *Legyen $A, B \in \mathcal{F}$. Az "A egyenlő B" (röviden $A \simeq B$) állítás teljesülésének a mértékét, amit Pos$(A = B)$-vel jelölünk, a következőképpen határozzuk meg*

$$\textit{Pos}(A = B) = \sup_{x \in \mathbb{R}} A(x) \wedge B(x). \tag{15}$$

Látható, hogy a Pos$(A \leq B)$-t és a Pos$(A = B)$-t a Zadeh-féle kiterjesztési elv alapján definiáltuk. A fuzzy számok összehasonlítására még sok egyéb módszer is használatos.

Definició 3.23 *Legyen $\xi \in \mathcal{F}$ egy fuzzy szám és legyen $D \subset \mathbb{R}$. Annak az állításnak lehetőségét, hogy "D tartalmazza a ξ értékét" (*the grade of possibility of the statement "D contains the value of ξ"*) a következő formulával határozzuk meg*

$$\textit{Pos}(\xi | D) = \sup_{x \in D} \xi(x) \tag{16}$$

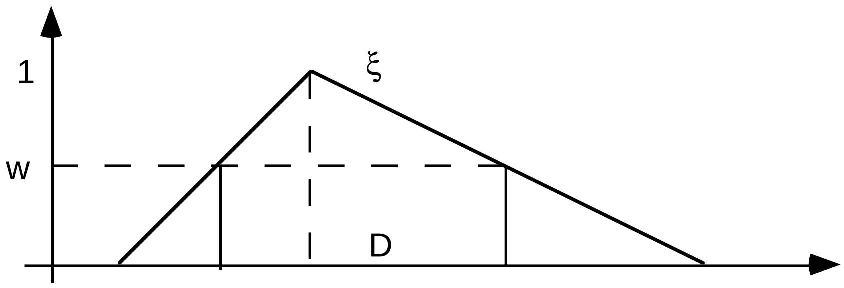

Figure 14: $\mathrm{Pos}(\xi|D) = 1$ és $\mathrm{Nes}(\xi|D) = 1 - w$.

Definició 3.24 *Legyen $\xi \in \mathcal{F}$ egy fuzzy szám és legyen $D \subset \mathbb{R}$. Annak az állításnak a szükségszerűségi mértékét, hogy "D tartalmazza a ξ értékét" (*the grade of necessity of the statement "D contains the value of ξ"*) a következő formulával határozzuk meg*

$$\mathit{Nes}(\xi|D) = 1 - \mathit{Pos}(\xi|\bar{D}) = 1 - \sup_{x \notin D} \xi(x) \tag{17}$$

ahol $\bar{D}$ jelöli a D komplementer halmazát.

1867-ben Csebisev [48] bebizonyította a következő tételt, amit a nagy számok törvényének Csebisev-féle alakjának hívnak.

Tétel 3.4 *[48] Ha $\xi_1, \xi_2, \ldots$ páronként független valószínűségi változók egy sorozata, amelyek szórása egységesen egy konstans alatt marad és*

$$M = \lim_{n\to\infty} \frac{M_1 + \cdots + M_n}{n},$$

létezik, akkor tetszőleges $\epsilon > 0$ konstans esetére fennáll a

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Prob}\left(\left| \frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{n} - \frac{M_1 + \cdots + M_n}{n} \right| < \epsilon \right) = 1$$

ahol M_n jelöli a ξ_n várható értékét és Prob a valószínűséget.

Definició 3.25 *Legyen $A, B \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$. Tudva, hogy az "$x$ az B" állítás igaz, akkor az "x az A" állítás lehetőségi mértéke, Pos$[A|B]$, a következő formulával van megadva*

$$\mathit{Pos}[A|B] = \sup\{A(t) \wedge B(t) \mid t \in \mathbb{R}\},$$

az "x az A" állítás szükségszerűségi mértéke, Nes$[A|B]$, pedig a következő

$$\textit{Nes}[A|B] = 1 - \textit{Pos}[\neg A|B] = 1 - \sup\{[1 - A(t)] \wedge B(t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

A logikai és *művelet, $\wedge$, modellezésére használhatunk tetszőleges T t-normát is. Ilyenkor*

$$\textit{Pos}[A|B] = \sup\{T(A(t), B(t))|t \in \mathbb{R}\}. \qquad (18)$$

illetve

$$\textit{Nes}[A|B] = 1 - \textit{Pos}[\neg A|B] = 1 - \sup\{T(1 - A(t), B(t)) \mid t \in \mathbb{R}\}. \qquad (19)$$

Az 3.25-es definició egy speciális esete az, amikor a fuzzy halmazok tartója egy diszkrét halmaz részhalmaza. Legyen $n > 1$ természetes szám, és legyenek az $A, W \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ fuzzy halmazok tartói az $\{1/n, 2/n, \dots, 1\}$ halmazban, úgy hogy $A(j/n) = a_j, \quad W(j/n) = w_j, \ j = 1, \dots, n$. Ekkor a Nes$[A|W]$-re a minimum normával következő képletet kapjuk

$$\text{Nes}[A|W] = \min_j\{(1 - w_j) \vee a_j\} = \min_j\{w_j \to a_j\}$$

ahol $\to$ a Kleene-Dienes-féle fuzzy implikáció. Illetve, ha a T t-normát használjuk, akkor (19) a következő lesz

$$\text{Nes}[A|W] = \min_j S(1 - w_j, a_j) = \min_j\{w_j \to a_j\}$$

ahol $\to$ a T normából származtatott S-implikációt jelöli. Ilyenkor használjuk a

$$\text{Nes}[A|W] = \text{Nes}[(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid (w_1, w_2, \dots, w_n)] \qquad (20)$$

jelölést.

Definició 3.26 *Legyen $L > 0$ egy valós szám. Akkor $\mathcal{F}(L)$ jelölje azoknak a fuzzy számoknak a halmazát, amelyek tartalmazási függvénye kielégiti a Lipschitz feltételt az L konstanssal, azaz*

$$A \in \mathcal{F}(L) \iff |A(t) - A(t')| \le L|t - t'| \ \forall t, t' \in \mathbb{R}. \qquad (21)$$

Definició 3.27 *Legyen $A \in \mathcal{F}$ egy fuzzy szám. Ekkor A tartalmazási függvényének a folytonossági modolusát a*

$$\omega(A, \theta) = \max_{|u-v| \le \theta} |A(u) - A(v)| \qquad (22)$$

képlettel definiáljuk, minden $\theta > 0$ esetén.

3.1 A Bellman-Zadeh-féle elv a fuzzy döntéselméletben

Tekintsük a következő klasszikus többcélfüggvényü matematikai programozási feladatot

$$\max_{x \in Z}\{f_1(x), \ldots, f_k(x)\} \tag{23}$$

ahol $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a j-dik célfüggvény, $x \in \mathbb{R}^n$ a döntési változó (alternativa) és

$$Z = \{x \in \mathbb{R}^n | g_i(x) \leq 0,\ i = 1, \ldots, m\}$$

a megengedett megoldások halmaza. A feladat az, hogy válasszuk ki Z-ből a legjobb alternatívát, azt amelyik a legnagyobb mértékben elégiti ki az összes kritériumot.

Tegyük fel, meg tudjuk határozni, hogy egy adott $x \in \mathbb{R}^n$ pont milyen mértékkel elégiti ki az i-dik feltételt, és a j-dik célfüggvényt. Legyen C_i az i-dik korlátozást leiró fuzzy halmaz, azaz egy $x \in \mathbb{R}^n$-re $C_i(x)$ azt jelöli, hogy x milyen mértékben elégiti ki az i-dik korlátozó feltételt. Hasonlón, legyen G_j a j-dik célfüggvényt leiró fuzzy halmaz. Annak a mértéke, hogy x mennyire elégiti ki együttesen a korlátozásokat és a célfüggvényeket, a Bellman-Zadeh elv [45] alapján a következőppen adódik

$$\mu(x) = \min\{C_1(x), \ldots, C_m(x), G_1(x), \ldots, G_k(x)\}$$

minden $x \in \mathbb{R}^n$ esetén. Ilyenkor a D fuzzy halmazt a

$$\max\{G_1, \ldots, G_k\};\ \text{s.t. } \{C_1, \ldots, C_m\}$$

probléma fuzzy megoldásnak (*fuzzy decision*) hívjuk. A feladat (egy) optimális megoldása pedig az az x^* lesz, amelyikre

$$\mu(x^*) = \mu^* = \max_{x \in X} \mu(x). \tag{24}$$

Néha x^*-ot maximalizáló megoldásnak (*maximizing solution*) is hívjuk. Az optimális megoldások halmazát X^*-al jelöljük.

Az optimális megoldás az az $\mathbb{R}^n$-beli pont lesz, amelyik a legnagyobb mértékben kielégiti az összes korlátozó feltételt és az összes célfüggvényt egyidejűleg.

3.2 A következtetés Zadeh-féle kompoziciós szabálya

A Zadeh által 1973-ban bevezetett [60] kompoziciós következtetési szabály (*the compositional rule of inference*) a leggyakrabban használt következtetési szabály a fuzzy szabály-bázis alapu rendszerekben (*fuzzy rule-based systems*).

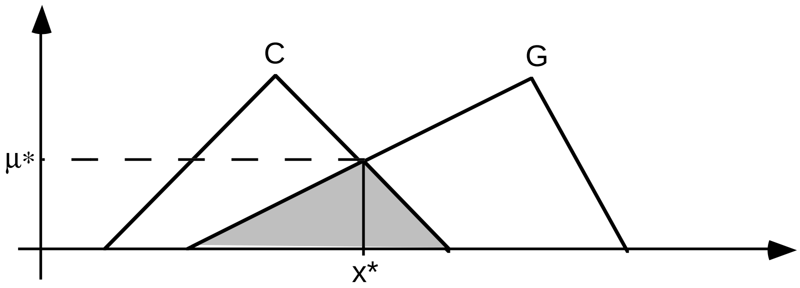

Figure 15: A Bellman-Zadeh-féle elv illusztrálása.

Definició 3.28 *[60] Legyenek X és Y nemüres halmazok. Ha $P \in \mathcal{F}(X)$ és $W\colon X \times Y \to [0,1]$ egy fuzzy reláció X és Y között, akkor a következő okoskodási sémát*

előfeltétel	x *az* P
tény	x *és* y *az* W *relációban vannak*
következmény	y *az* Q

ahol a $Q \in \mathcal{F}(Y)$ következményt a P és a W $\sup - \min$ kompoziciójával $Q = P \circ W$, definiáljuk, ami alatt azt értjük, hogy a Q tartalmazási függvényét a

$$Q(y) = \sup_{x \in X} \min\{P(x), W(x,y)\}, \tag{25}$$

formulával határozzuk meg minden $y \in Y$ esetén, a **következtetés Zadeh-féle kompoziciós szabályának** *nevezzük. A (25) formulát trianguláris normák segítségével is lehet definiálni:*

$$Q(y) = \sup_{x \in X} T(P(x), W(x,y)), \tag{26}$$

minden $y \in Y$ esetén, ilyenkor a következtetés Zadeh-féle $\sup - T$ kompoziciós szabályáról beszélünk.

Az általánosított *Modus Ponens* az egyik legfontosabb következtetési szabály a fuzzy szabály-bázisokban. Ilyenkor a (26)-ben a fuzzy reláció egy speciális esete a fuzzy implikáció áll.

Definició 3.29 *Legyenek X és Y nemüres halmazok. Ha T egy t-norma, $A, A' \in \mathcal{F}(X)$ és $B \in \mathcal{F}(Y)$, akkor a következő okoskodási sémában*

implikáció	*ha x az A akkor*	*y az B*
tény	*x az A'*	
következmény		*y is B'*

a $B' \in \mathcal{F}(Y)$ következményt az A és az $A \to B$ $\sup -T$ kompozíciójával határozzuk meg,

$$B' = A' \circ (A \to B)$$

azaz

$$B'(v) = \sup_{u \in X} T(A'(u), (A \to B)(u, v)) = \sup_{u \in X} T(A'(u), A(u) \to B(v)), \ v \in Y. \tag{27}$$

Ha az x és y változókat több ”ha-akkor” szabály köti össze, azaz

implikáció	ha x az A_1 akkor	y az B_1
...	...	
implikáció	ha x az A_m akkor	y az B_m
tény	x az A'	
következmény		y is B'

akkor (27) a következő alakú lesz

$$B'(v) = \bigcap_{i=1}^{m} A' \circ (A_i \to B_i),$$

azaz

$$B'(v) = \min\{\sup_{u \in X} T(A'(u), A_1(u) \to B_1(v)), \ldots, \sup_{u \in X} T(A'(u), A_m(u) \to B_m(v))\} \tag{28}$$

minden $v \in Y$ esetén.

4 Kutatási eredmények

4.1 Fuzzy rendszerek stabilitási problémái

1988-ban Kovács Margit [52] cikkével megindult a fuzzy rendszerek stabilitási tulajdonságainak a vizsgálata. 1989-ben [1] sikerült bizonyítanom, hogy a fuzzy lineáris programozási feladatok (szimmetrikus háromszögalakú fuzzy szám együtthatókkal) *korrekt* felállításuak, azaz kis mérési és kerekítési hibák az input paraméterekben (amik jelen esetben a fuzzy együtthatók centrumait jelentik) csak kis változást okozhatnak a fuzzy megoldásban.

Más szavakkal, a megoldás (output) folytonosan függ a bemenő paraméterektől. Tehát a fuzzy kiterjesztés azt eredményezi, hogy az általában nemkorrekt felállításu determinisztikus LP feladat korrekt felállításuvá válik, természetesen a fuzzy halmazokon értelmezett metrikában.

Tekintsük az

$$\langle a_0, x\rangle \to \min, \text{ s. t. } Ax \leq b \tag{29}$$

lineáris programozási feladatot. Nagyon sok esetben nem szükséges a az optimális megoldást megtalálni, hanem elég olyan x-t találni, amelyikre a célfüggvény értéke elég kicsi, azaz alatta van egy bizonyos - a döntéshozó (*decision maker*) által megadott - b_0 értéknek. Ekkor (29) a következő feladattá egyszerűsödik,

$$a_{01}x_1 + \cdots + a_{0n}x_n \leq b_0, \text{ s. t. } Ax \leq b \tag{30}$$

A $b_0 \in \mathbb{R}$ számot a döntéshozó aspirációs szintjének nevezzük.

Tegyük fel, hogy a (30) feladatban minden együttható fuzzy számokkal van megadva, Ekkor kicserélve az a_{ij} és a b_i együtthatókat a $\tilde{a}_{ij}$, $\tilde{b}_i$ fuzzy számokkal, a következő *fuzzy LP*-t kapjuk

$$\tilde{a}_{01}x_1 + \cdots + \tilde{a}_{0n}x_n \lesssim \tilde{b}_0, \text{ s. t. } \tilde{A}x \lesssim \tilde{b} \tag{31}$$

ahol $\tilde{A}$ jelöli az $(\tilde{a}_{ij})$ mátrixot, $\tilde{b}$ a (b_i) vektort, az i-dik korlátozást,

$$\tilde{a}_{i1}x_1 + \cdots + \tilde{a}_{in}x_n \lesssim \tilde{b}_i,$$

pedig valamilyen fuzzy halmazok közötti relációval értelmezzük, $i = 1, \ldots, m$.

Ha (30)-ben az a_{ij} és a b_i együtthatókat a $\tilde{a}_{ij} = (a_{ij}, \alpha)$ és $\tilde{b}_i = (b_i, d_i)$ szimmetrikus trianguláris fuzzy számokkal cseréljük ki, továbbá a $\lesssim$ relációt posszibilisztikus értelemben (14) tekintjük, akkor a következő fuzzy LP-t (amit hajlékony (*flexible*) LP-nek nevezünk) kapjuk

$$(a_{i1}, \alpha)x_1 + \cdots + (a_{in}, \alpha)x_n \lesssim (b_i, d_i), \quad i = 0, \ldots, m. \tag{32}$$

Bármely $x \in R^n$-re jelölje $\mu_i(x)$ azt, hogy x milyen mértékben elégiti ki az i-dik egyenlőtlenséget, azaz

$$\mu_i(x) = \text{Pos}(\tilde{a}_{i1}x_1 + \cdots + \tilde{a}_{in}x_n \leq \tilde{b}_i).$$

Ekkor belátható [1], hogy

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } \langle a_i, x\rangle \leq b_i, \\ 1 - \frac{\langle a_i, x\rangle - b_i}{\alpha|x|_1 + d_i} & \text{különben}, \\ 0 & \text{ha } \langle a_i, x\rangle > b_i + \alpha|x|_1 + d_i, \end{cases} \tag{33}$$

ahol, $|x|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$ és $\langle a_i, x\rangle = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n,\ i = 0, 1, \ldots, m.$ A Bellman-Zadeh elv alapján a (32) fuzzy megoldása a

$$\mu(x) = \min_{i=0,\ldots,m} \mu_i(x)$$

fuzzy halmaz, míg egy optimális megoldása, x^*, eleget tesz az

$$\mu(x^*) = \mu^* = \max_{x \in R^n} \mu(x).$$

összefüggésnek. Használni fogjuk az

$$X^* = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mu(x) = \mu^*\} \tag{34}$$

jelölést. Tegyük fel, hogy a az (32) fuzzy LP-ben a pontos a_{ij} és b_i centrumok helyett csak az $a_{ij}(\delta)$ és $b_i(\delta)$ állnak rendelkezésre, úgy, hogy

$$\max_{i,j} |a_{ij} - a_{ij}(\delta)| \leq \delta, \quad \max_i |b_i - b_i(\delta)| \leq \delta, \tag{35}$$

ahol $\delta > 0$ (a mérési vagy kerekítési hiba), rendszerint kicsi szám. Ekkor az eredeti helyett a következő *perturbált* problémát kapjuk

$$(a_{i1}(\delta), \alpha)x_1 + \cdots + (a_{in}(\delta), \alpha)x_n \lesssim (b_i(\delta), d_i),\ \ i = 0, \ldots, m. \tag{36}$$

Hasonló módon definiájuk a perturbált probléma megoldását, azaz

$$\mu^\delta(x) = \min_{i=0,\ldots,m} \mu_i^\delta(x),\ \ x \in R^n,$$

ahol

$$\mu_i^\delta(x) = \text{Pos}[(a_{i1}(\delta), \alpha)x_1 + \cdots + (a_{in}(\delta), \alpha)x_n \leq (b_i(\delta), d_i)]$$

és $x^*(\delta)$ pedig a

$$\mu^\delta(x^*(\delta)) = \mu^*(\delta) = \sup_{x\in R^n} \mu^\delta(x) \tag{37}$$

probléma (egy) megoldása. Használni fogjuk az

$$X^*(\delta) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mu^\delta(x) = \mu^*(\delta)\} \tag{38}$$

jelölést.

A következő tétel [1] azt mondja ki, hogy ha δ elég kicsi, akkor a fuzzy megoldás folytonosan függ a bemenő adatoktól (a fuzzy számok centrumaitól), azaz a (32) fuzzy LP egy korrektül felállított (*well-posed*) probléma.

Tétel 4.1 *[1]* **[Fullér, 1989]**
Legyenek μ illetve μ^δ megoldásai az eredeti (32) és a perturbált (36) fuzzy LP problémáknak, értelemszerűen. Ekkor,

$$||\mu - \mu^\delta||_\infty = \sup_{x\in R^n} |\mu(x) - \mu^\delta(x)| \le \delta(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{d}) \tag{39}$$

ahol $d = \min\{d_1, \dots, d_m\}$.

Megjegyzés 4.1 *A (39) összefüggésből azonnal következik, hogy*

$$||\mu - \mu^\delta||_\infty \to 0 \text{ és } |\mu^* - \mu^*(\delta)| \to 0 \text{ ha } \delta/\alpha \to 0 \text{ és } \delta/d$$

ami az (32) probléma fuzzy megoldásának, és az optimális megoldás szintjének a a stabilitását mutatja a (35) perturbációk tekintetében.

Megjegyzés 4.2 *A fentiek ellenére semmi sem garantálja azonban az optimális megoldás stabilitását, azaz előfordulhat, hogy az eredeti feladat optimális megoldásainak a halmaza, X^*, és a perturbált feladat megoldás halmaza, $X^*(\delta)$, messze vannak egymástól, annak ellenére, hogy δ kicsi.*

Kovács Margittal és F.P.Vasiljevvel közösen [2] vizsgáltuk a

$$\tilde{a}_{i1}x_1 + \dots + \tilde{a}_{in}x_n \simeq \tilde{b}_i,\ i = 1, \dots, m \tag{40}$$

posszibilisztikus lineáris egyenletrendszert, ahol

$$\tilde{a}_{ij} = (a_{ij}-\theta, a_{ij}+\theta, a_{ij}-\theta-\alpha, a_{ij}+\theta+\alpha), \quad \tilde{b}_i = (b_i-\theta, b_i+\theta, b_i-\theta-\alpha, b_i+\theta+\alpha), \tag{41}$$

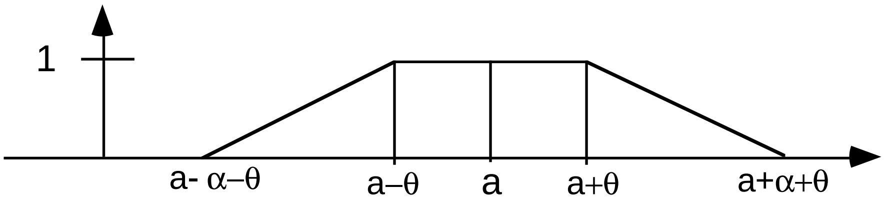

Figure 16: Szimmetrikus trapéz alakú fuzzy szám a centrummal.

szimmetrikus trapéz alakú fuzzy számok $(\theta > 0, \alpha > 0)$, az összeadás és a skalárral való szorzás műveletek a Zadeh-féle kiterjesztési elv szerint vannak definiálva, az egyenlőséget pedig posszibilisztikus értelemben (15) kell tekinteni, azaz egy tetszőleges $x \in \mathbb{R}^n$ az i-dik egyenletet

$$\mu_i(x) = \text{Pos}(\tilde{a}_{i1}x_1 + \cdots + \tilde{a}_{in}x_n = \tilde{b}_i).$$

mértékkel elégiti ki, továbbá a (40) fuzzy megoldását a Bellman-Zadeh elv szerint definiáljuk, azaz

$$\mu(x) = \min\{\mu_i(x), \ldots, \mu_m(x)\}, \ \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

míg egy optimális megoldás, x^*, eleget tesz az

$$\mu(x^*) = \mu^* = \max_{x \in R^n} \mu(x). \tag{42}$$

összefüggésnek.

Tegyük fel, hogy (40)-ban pontos a_{ij} és b_i centrumok helyett csak az $a_{ij}(\delta)$ és $b_i(\delta)$ állnak rendelkezésre, amelyek kielégitik a (35) összefüggéseket. Ekkor az eredeti helyett a következő *perturbált* problémát kapjuk

$$\tilde{a}_{i1}^{\delta}x_1 + \cdots + \tilde{a}_{in}^{\delta}x_n \simeq \tilde{b}_i^{\delta}, \ i = 1, \ldots, m \tag{43}$$

ahol $\tilde{a}_{ij}^{\delta}$ és $\tilde{b}_i^{\delta}$ ugyanolyan szélességü szimmetrikus trapéz alku fuzzy számok mint (41), de az a_{ij}^{δ} és b_i^{δ} centrumokkal.

Hasonló módon definiájuk a perturbált probléma megoldását, azaz

$$\mu^{\delta}(x) = \min\{\mu_1^{\delta}(x), \ldots, \mu_m^{\delta}(x)\}, \ x \in R^n,$$

és $x^*(\delta)$ pedig a

$$\mu^{\delta}(x^*(\delta)) = \mu^*(\delta) = \sup_{x \in R^n} \mu^{\delta}(x)$$

probléma (egy) megoldása.

A következő tétel [2] azt mondja ki, hogy ha δ elég kicsi, akkor a fuzzy megoldás folytonosan függ a bemenő adatoktól (a fuzzy számok centrumaitól), azaz (40) egy korrektül felállított probléma.

Tétel 4.2 *[2]* **[Kovács, Vasiljev és Fullér, 1989]**
Legyenek μ illetve μ^δ megoldásai az eredeti (40) és a perturbált (43) possibilisztikus lineáris egyenletrendszereknek értelemszerűen. Ekkor,

$$||\mu - \mu^\delta||_\infty = \sup_{x \in R^n} |\mu(x) - \mu^\delta(x)| \leq \min\{\frac{\delta}{\alpha}, 1\}. \tag{44}$$

Megjegyzés 4.3 *A (44) összefüggésből azonnal következik, hogy*

$$||\mu - \mu^\delta||_\infty \to 0 \text{ és } |\mu^* - \mu^*(\delta)| \to 0 \text{ ha } \delta/\alpha \to 0,$$

ami az (40) probléma fuzzy megoldásának, és az optimális megoldás szintjének a a stabilitását mutatja a (35) perturbációk tekintetében.

A (44) összefüggesből jól látható, hogy a (40) probléma fuzzy megoldásának a stabilitását nem befolyásolja θ, a trapéz felső szélessége; a perturbált fuzzy megoldás eltérése az eredetitől csak a δ és az α viszonyán múlik.

Jelen esetben egy maximalizáló megoldás megtalálása a (42) képletből ekvivalens a következő nemlineáris matematikai programozási feladat megoldásával [2]:

$$\gamma \to \max;\ (x, \gamma) \in Z,$$

$$Z = \left\{(x, \gamma) \mid 1 + \frac{\theta}{\alpha} - \frac{||Ax - b||_\infty}{\alpha(|x|_1 + 1)} \geq \gamma,\ 0 \leq \gamma \leq 1\right\}$$

A következő tétel azt mutatja, hogy ha az $Ax = b$ egyenletrendszer van megoldása és $\theta > 0$, akkor az eredeti és a perturbált egyenletrendszerek megoldás halmazai közel tehetők egymáshoz, bizonyos feltételek teljesülése esetén.

Tétel 4.3 *[2]* **[Kovács, Vasiljev és Fullér, 1989]**
Tegyük fel, hogy az $Ax = b$ egyenletnek van megoldása, azaz az $X^{**} = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b\}$ halmaz nemüres. Ha $a_{ij}(\delta)$ és $b_i(\delta)$ kielégitik a (35) összefüggéseket, és $0 \leq \delta \leq \theta$, akkor

$$\rho(x, X^*) = \inf_{y \in X^*} |x - y| \leq C_0(\delta + \theta)(|x|_1 + 1),\ x \in X^*(\delta) \tag{45}$$

ahol X^* az eredeti és $X^*(\delta) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mu^\delta(x) = 1\}$ a perturbált probléma optimális megoldásainak a halmazai és C_0 egy pozitiv állandó csak az a_{ij} elemktől függ.

A 4.3-as tétel tehát nem állít mást, minthogy az X^* és az $X^*(\delta)$ halmazok közel vannak egymáshoz, feltéve, ha az $X^*(\delta),\ \forall\delta > 0$ halmazok egy egységes korlát alatt maradnak.

1989-ben Kovács Margittal közösen [3] zárt formulákat adtunk a fuzzy lineáris egyenlet és egyenlőtlenség rendszerek megoldására, abban az esetben, amikor az együtthatók g-fuzzy számokkal [53] vannak megadva.

Az 4.2-es tételünket 1990-ben általánosítottam Lipschitz tulajdonságú fuzzy szám együtthatókkal rendelkező lineáris egyenletrendszerekre. Tekintsük a (40) posszibilisztikus lineáris egyenletrendszert, amelyben az $\tilde{a}_{ij}$ és $\tilde{b}_i$ fuzzy számok tartalmazási függvényei kielégitik a Lipschitz feltételt egy $L > 0$ konstanssal (21). Tegyük fel továbbá, hogy az $\tilde{a}_{ij}$ és $\tilde{b}_i$ fuzzy számok helyett csak $\tilde{a}_{ij}^{\delta}$ és $\tilde{b}_i^{\delta}$ fuzzy számok állnak rendelkezésre, amelyek kielégitik a következő egyenlőtlenségeket,

$$\max_{i,j} D(\tilde{a}_{ij}, \tilde{a}_{ij}^{\delta}) \leq \delta, \quad \max_{i} D(\tilde{b}_i, \tilde{b}_i^{\delta}) \leq \delta, \tag{46}$$

ahol $\delta > 0$ és D jelöli a Hausdorff-távolságot $\mathcal{F}$-en (13). Ekkor az eredeti helyett a (43) *perturbált* problémát kapjuk.

Tétel 4.4 *[6]* **[Fullér, 1990]**

Legyen $L > 0$ *és legyenek* μ *illetve* μ^{δ} *megoldásai az eredeti (40) és a perturbált (43) posszibilisztikus lineáris egyenletrendszereknek értelemszerűen. Ha* $\tilde{a}_{ij}, \tilde{b}_i, \tilde{a}_{ij}^{\delta}, \tilde{b}_i^{\delta} \in \mathcal{F}(L)$ *kielégitik a (46) összefüggéseket, akkor*

$$||\mu - \mu^{\delta}||_{\infty} = \sup_{x \in R^n} |\mu(x) - \mu^{\delta}(x)| \leq L\delta.$$

Azaz, ha δ elég kicsi, akkor μ elég közel lesz μ^{δ}-hoz.

Az 4.1-es tételemet 1992-ben általánosítottuk Mario Fedrizzivel közösen tetszőleges fuzzy szám együtthatókkal rendelkező posszibilisztikus lineáris LP-re. Tekintsük a következő posszibilisztikus LP-t

$$\max Z = \tilde{c}_1 x_1 + \cdots + \tilde{c}_n x_n, \text{ s. t. } \tilde{A}x \lesssim \tilde{b},\ x \geq 0, \tag{47}$$

ahol a $\lesssim$ relációt posszibilisztikus értelemben definiáljuk.

A Z célfüggvény feltételes posszibilisztikus eloszlását (*the conditional possibility that Z equals z given x*) adott x esetén a

$$\text{Pos}(Z = z|x) = \sup_{c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n = z} \min\{\tilde{c}_1(c_1), \ldots, \tilde{c}_n(c_n)\}$$

formulával, a Zadeh-féle sup-min kiterjesztési elv szerint definiáljuk. A Z célfüggvény posszibilisztikus eloszlását pedig a

$$\text{Pos}(Z = z) = \sup_{x \geq 0} \min\{\text{Pos}(Z = z|x), \text{Pos}(\tilde{A}x \lesssim \tilde{b}\})$$

formulával, a Bellman-Zadeh-féle elv szerint definiáljuk.

A perturbált posszibilisztikus LP legyen adva a következő alakban

$$\max Z^\delta = \tilde{c}_1^\delta x_1 + \cdots + \tilde{c}_n^\delta x_n, \text{ s. t. } \tilde{A}^\delta x \lesssim \tilde{b}^\delta, \ x \geq 0, \tag{48}$$

Ekkor igaz a következő tétel.

Tétel 4.5 *[13]* **[Fedrizzi és Fullér, 1992]**
Legyenek Pos$(Z = z)$ *illetve Pos*$(Z^\delta = z)$ *a (47) illetve a (48) LP célfüggvényeinek posszibilisztikus eloszlásai. Ha* $\tilde{c}_j$, $\tilde{a}_{ij}$, $\tilde{b}_i$, $\tilde{c}_j^\delta$, $\tilde{a}_{ij}^\delta$, $\tilde{b}_i^\delta \in \mathcal{F}$ *kielégitik a*

$$\max_{i,j} D(\tilde{a}_{ij}, \tilde{a}_{ij}^\delta) \leq \delta, \quad \max_i D(\tilde{b}_i, \tilde{b}_i^\delta) \leq \delta, \quad \max_j D(\tilde{c}_j, \tilde{c}_j^\delta) \leq \delta, \tag{49}$$

összefüggéseket, akkor

$$\sup_{z \in \mathbb{R}} |Pos(Z = z) - Pos(Z^\delta = z)| \leq \omega(\delta), \tag{50}$$

ahol

$$\omega(\delta) = \max_{i,j}\{\omega(\tilde{c}_j, \delta), \omega(\tilde{a}_{ij}, \delta), \omega(\tilde{b}_i, \delta), \omega(\tilde{c}_j^\delta, \delta), \omega(\tilde{a}_{ij}^\delta, \delta), \omega(\tilde{b}_i^\delta, \delta)\}.$$

jelöli a folytonossági modolusok (22) maximumát.

Megjegyzés 4.4 *A (50) összefüggésből azonnal látszik, hogy*

$$|Pos(Z = z) - Pos(Z^\delta = z)| \to 0 \textit{ ha } \delta \to 0$$

minden $z \in \mathbb{R}$*-re ami a (47) és (48) célfüggvényei eloszlásának a stabilitását mutatja a (49) (kismértékű) perturbációk tekintetében.*

1994-ben az *European Journal of Operational Research*-ben Mario Fedrizzivel közösen [24] sikerült a 4.5-es tételt általánosítanunk többcélfüggvényü posszibilisztikus LP-re is. Tekintsük a következő többcélfüggvényü posszibilisztikus LP-t

$$\max\ Z = (\tilde{c}_1 x, \ldots \tilde{c}_k x), \text{ s. t. } \tilde{A}x \lesssim \tilde{b}, x \geq 0, \tag{51}$$

ahol a $\lesssim$ relációt posszibilisztikus értelemben definiáljuk.

A Z célfüggvény feltételes posszibilisztikus eloszlását adott x esetén a

$$\text{Pos}[Z = (z_1, \ldots, z_k)|x] = \min_{1 \le l \le k} \text{Pos}[\tilde{c}_l x = z_l],$$

a Zadeh-féle sup-min kiterjesztési elv szerint definiáljuk. A Z célfüggvény posszibilisztikus eloszlását pedig a

$$\text{Pos}[Z = (z_1, \ldots, z_k)] = \sup_{x \ge 0} \min\{\text{Pos}[Z = (z_1, \ldots, z_k)|x], \mu(x)\}$$

Bellman-Zadeh-féle elv szerint definiáljuk, ahol $\mu(x) = \min\{\mu_1(x), \ldots, \mu_n(x)\}$ azt mutatja meg, hogy milyen mértékben elégiti ki x az $\tilde{A}x \lesssim \tilde{b}$ feltételrendszert.

A perturbált többcélfüggvényü posszibilisztikus LP legyen adva a következő alakban

$$\max Z = (\tilde{c}_1^\delta x, \ldots \tilde{c}_k^\delta x), \text{ s. t. } \tilde{A}^\delta x \lesssim \tilde{b}^\delta,\ x \ge 0. \tag{52}$$

Tétel 4.6 *[24]* **[Fullér és Fedrizzi, 1994]**

Legyenek Pos$(Z = z)$ illetve Pos$(Z^\delta = z)$ a (51) illetve a (52) LP célfüggvényeinek posszibilisztikus eloszlásai. Ha $\tilde{c}_{lj}$, $\tilde{a}_{ij}$, $\tilde{b}_i$, $\tilde{c}_{lj}^\delta$, $\tilde{a}_{ij}^\delta$, $\tilde{b}_i^\delta \in \mathcal{F}$ kielégitik a

$$\max_{i,j,l} D(\tilde{a}_{ij}, \tilde{a}_{ij}^\delta) \le \delta, \quad \max_i D(\tilde{b}_i, \tilde{b}_i^\delta) \le \delta, \quad \max_j D(\tilde{c}_{lj}, \tilde{c}_{lj}^\delta) \le \delta, \tag{53}$$

összefüggéseket, akkor

$$\sup_{z \in \mathbb{R}^k} |Pos(Z = z) - Pos(Z^\delta = z)| \le \omega(\delta),$$

ahol

$$\omega(\delta) = \max_{i,j}\{\omega(\tilde{c}_j, \delta), \omega(\tilde{a}_{ij}, \delta), \omega(\tilde{b}_i, \delta), \omega(\tilde{c}_j^\delta, \delta), \omega(\tilde{a}_{ij}^\delta, \delta), \omega(\tilde{b}_i^\delta, \delta)\}. \tag{54}$$

jelöli a fuzzy számok folytonossági modolusainak a maximumát.

1994-ben Patrik Eklunddal és Mario Fedrizzivel közösen [25] sikerült a 4.6-es tételt általánosítanunk olyan többcélfüggvényü posszibilisztikus LP-re, ahol a műveleteket $\sup -T$ konvolucióval értelmeztük.

Tétel 4.7 *[25]* **[Eklund, Fedrizzi és Fullér, 1994]**

Legyen T egy folytonos t-norma. Legyenek Pos$(Z = z)$ illetve Pos$(Z^\delta = z)$ a (51) illetve a (52) LP célfüggvényeinek posszibilisztikus eloszlásai, azzal a feltétellel, *hogy a műveleteket a* $\sup -T$ *konvolucióval értelmeztük. Ha* $\tilde{c}_{lj}$, $\tilde{a}_{ij}$, $\tilde{b}_i$, $\tilde{c}^{\delta}_{lj}$, $\tilde{a}^{\delta}_{ij}$, $\tilde{b}^{\delta}_i \in \mathcal{F}$ *kielégitik a (53) összefüggéseket, akkor*

$$\sup_{z \in \mathbb{R}^k} |Pos(Z = z) - Pos(Z^{\delta} = z)| \leq \omega(T, \omega(\delta)),$$

ahol $\omega(\delta)$*-t a (54) összefüggésből kapjuk,* $\omega(T,.)$ *meg a* T *folytonossági modolusa.*

A fenti stabilitási tételeket 1996-ban Elio Canestrellivel és Silvio Giovevel közösen kiterjesztettük posszibilisztikus quadratikus LP-re is [34].

4.2 Fuzzy aritmetika

Az LR-típusu fuzzy számokon végzett aritmetikai műveletek nagyon egyszerű formát öltenek [lásd (8, 9)], ha a Zadeh-féle sup-min kiterjesztési elv (7) szerint értelmezzük őket. Azonban, ha az általánosabb, sup-t-norma kiterjesztési elvet (12) használjuk, akkor az artitmetikai műveletek eredményét csak egy - általában nemlineáris - programozási feladat egzakt megoldása adja. Ezzel magyarázható, hogy Dubois és Prade 1981-as problémafelvető [49] cikke után nem foglalkoztak érdemben a t-norma alapu aritmetikai operációkkal, mígnem nagyon sok számolás után rájöttem arra, hogy bizonyos típusu fuzzy számok végtelen összegének a kiszámitására a teljes indukció módszere alkalmazható [7, 9].

Az első eredményem 1991-ben jelent meg [7], amelyben szimmetrikus háromszögalakú fuzzy számok végtelen összegének a határelosztására adtam zárt formulát arra az esetre, amikor az összeadás műveletét a szorzat t-norma (*product t-norm*) segítségével terjesztettük ki, azaz

$$(\tilde{a}_1 \oplus \tilde{a}_2)(y) = \sup_{x_1 + x_2 = y} \tilde{a}_1(x_1)\tilde{a}_2(x_2) \tag{55}$$

ahol $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \in \mathcal{F}$. Ilyenkor $\tilde{a}_1 \oplus \tilde{a}_2$ az $\tilde{a}_1$ és $\tilde{a}_2$ szorzat-összegének nevezzük (*product-sum*).

Az ilyen típusu tételek azért jelentősek, mivel a minimum norma nagyon sokszor nem megfelelő a logikai *and* operátor modellezésére, mivel túl nagy, azaz nem szorítja le eléggé a lényegtelen elemek szerepét.

Tétel 4.8 *[7]* **[Fullér, 1991]**

Legyenek $\tilde{a}_i = (a_i, \alpha) \in \mathcal{F}, i \in \mathbf{N}$ *szimmetrikus háromszögalakú fuzzy számok, azaz*

$$\tilde{a}_i(t) = \begin{cases} 1 - |a_i - t|/\alpha & \textit{ha } |a_i - t| \leq \alpha \\ 0 & \textit{különben} \end{cases}$$

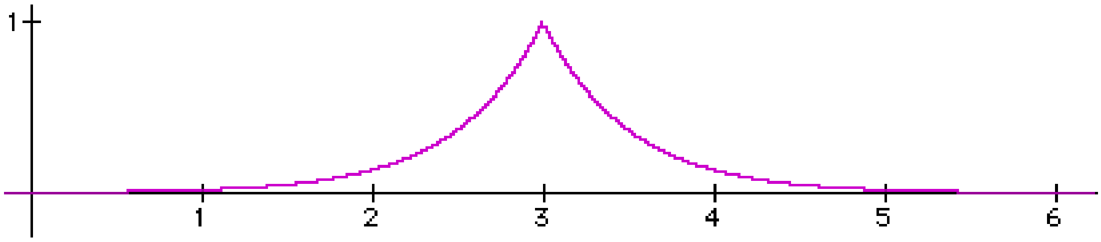

Figure 17: Az $\tilde{a}_1 \oplus \tilde{a}_2 \oplus \cdots$ szorzat-összeg határeloszlása, $A = 3$ és $\alpha = 0.5$ esetén.

Ha $A := \sum_{i=1}^{\infty} a_i$ *létezik és véges, akkor a*

$$\tilde{A}_n := \tilde{a}_1 \oplus \cdots \oplus \tilde{a}_n,\ A_n := a_1 + \cdots + a_n,\ n \in \mathbf{N},$$

jelölésekkel

$$\tilde{A}_n(z) = \begin{cases} \left[1 - \frac{|A_n - z|}{n\alpha}\right]^n & \textit{ha } |A_n - z| \le n\alpha \\ 0 & \textit{különben} \end{cases}$$

továbbá,

$$\big[\lim_{n\to\infty} \tilde{A}_n\big](z) = \exp(-|A - z|/\alpha),\ z \in \mathbb{R}.$$

ahol az összeadást a (55) műveletét szerint definiáltuk.

Megjegyzés 4.5 *A (4.8) tételemet E.Triesch javította meg 1993-ban, J. B Kim szintén 1993-ban, D.H.Hong 1994-ben, illteve D.H.Hong és S.Y.Hwang 1997-ben.*

A [9] cikkben sikerült zárt formulákat kapnom az $\tilde{a}_1 \oplus \tilde{a}_2 \oplus \cdots$ végtelen összegnek a határelosztására, abban az esetre, amikor az összeadás műveletét a Hamacher-féle parametrizált t-norma család segítségével terjesztettük ki, azaz

$$(\tilde{a}_1 \oplus \tilde{a}_2)(y) = \sup_{x_1 + x_2 = y} H_\gamma(\tilde{a}_1(x_1), \tilde{a}_2(x_2)) \tag{56}$$

ahol $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \in \mathcal{F}$ és $\gamma \in \{0, 1, 2\}$.

A $\gamma = 0$ paraméterérték esetén a legnagyobb t-normát kapjuk a Hamacher-féle parametrikus családból,

$$H_0(a, b) = \frac{ab}{a + b - ab}.$$

Az ezzel a t-normával definiált összeg határelosztására ad zárt formulát a következő tétel.

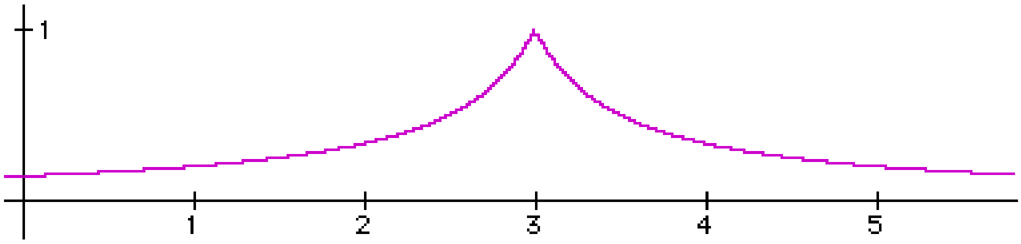

Figure 18: Az $\tilde{a}_1 \oplus \tilde{a}_2 \oplus \cdots$ H_0-összeg határeloszlása, $A = 3$ és $\alpha = 0.5$ esetén.

Tétel 4.9 *[9]* **[Fullér, 1991]**
Legyen $\gamma = 0$ és legyenek $\tilde{a}_i = (a_i, \alpha) \in \mathcal{F}, i \in \mathbf{N}$ szimmetrikus háromszögalakú fuzzy számok. Ha $A := \sum_{i=1}^{\infty} a_i$ létezik és véges, akkor a

$$\tilde{A}_n := \tilde{a}_1 \oplus \cdots \oplus \tilde{a}_n,\ A_n := a_1 + \cdots + a_n,\ n \in \mathbf{N},$$

jelölésekkel

$$\big[\lim_{n\to\infty} \tilde{A}_n\big](z) = \frac{1}{1 + |A - z|/\alpha},\ z \in \mathbb{R}.$$

ahol az összeget a (56) szerint a $\gamma = 0$ paraméter értékkel definiáljuk.

Ha $\gamma = 1$, akkor a $H_1(a, b) = ab$ összefüggés miatt, a Hamacher-összeg megegyezik a szorzat-összeggel. A $\gamma = 2$ paraméterérték esetén az Einstein-féle t-normát kapjuk,

$$H_2(a, b) = \frac{ab}{2 - (a + b - ab)}.$$

Az ezzel a t-normával definiált összeg határelosztására ad zárt formulát a következő tétel.

Tétel 4.10 *[9]* **[Fullér, 1991]**
Legyen $\gamma = 2$ és legyenek $\tilde{a}_i = (a_i, \alpha) \in \mathcal{F}, i \in \mathbf{N}$ szimmetrikus háromszögalakú fuzzy számok. Ha $A := \sum_{i=1}^{\infty} a_i$ létezik és véges, akkor a

$$\tilde{A}_n := \tilde{a}_1 \oplus \cdots \oplus \tilde{a}_n,\ A_n := a_1 + \cdots + a_n,\ n \in \mathbf{N},$$

jelölésekkel

$$\big[\lim_{n\to\infty} \tilde{A}_n\big](z) = \frac{2}{1 + \exp(2|A - z|/\alpha)},\ z \in \mathbb{R}.$$

ahol az összeget a (56) szerint a $\gamma = 2$ paraméter értékkel definiáljuk.

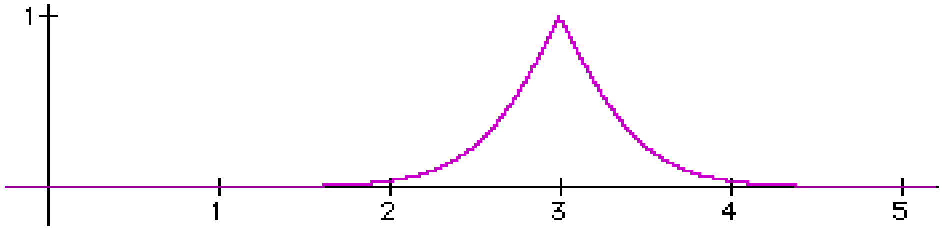

Figure 19: Az $\tilde{a}_1 \oplus \tilde{a}_2 \oplus \cdots$ H_2-összeg határeloszlása, $A = 3$ és $\alpha = 0.5$ esetén.

1992-ben Keresztfalvi Tiborral közösen sikerült zárt formulát találni az LR-típusu fuzzy számok összegére archimedeszi t-normák esetén.

Tétel 4.11 *[14]* **[Fullér és Keresztfalvi, 1992]**
Legyen T archimedeszi t-norma az f additiv generátorral és legyenek $\tilde{a}_i = (a_i, b_i, \alpha, \beta)_{LR}$, $i = 1, \dots, n$, LR-típusu fuzzy számok, azaz

$$\tilde{a}_i(t) = \begin{cases} 1 & \textit{ha } t \in [a_i, b_i] \\ L((a_i - t)/\alpha) & \textit{ha } t \in [a_i - \alpha, a_i] \\ R((t - b_i)/\beta) & \textit{ha } t \in [b_i, b_i + \beta] \\ 0 & \textit{különben} \end{cases}$$

Ha L és R kétszer differenciálható, konkáv függvények és f kétszer differenciálható szigorúan konvex függvény, akkor az $\tilde{A}_n := \tilde{a}_1 \oplus \cdots \oplus \tilde{a}_n$ tartalmazási függvénye a következő alakú

$$\tilde{A}_n(z) = \begin{cases} 1 & \textit{if } A_n \le z \le B_n \\ f^{[-1]}\left(n \times f\left(L\left(\dfrac{A_n - z}{n\alpha}\right)\right)\right) & \textit{if } A_n - n\alpha \le z \le A_n \\ f^{[-1]}\left(n \times f\left(R\left(\dfrac{z - B_n}{n\beta}\right)\right)\right) & \textit{if } B_n \le z \le B_n + n\beta \\ 0 & \textit{otherwise} \end{cases}$$

ahol $A_n := a_1 + \cdots + a_n$, $B_n := b_1 + \cdots + b_n$ és az összeadást a $\sup -T$ kiterjesztési elvvel (12) definiáltuk.

Megjegyzés 4.6 *A (4.11) tételünket M.F.Kawaguchi és T. Da-Te javította meg 1993-ban és 1994-ben, D.H.Hong és S.Y.Hwang 1994-ben és 1997-ben, D.H.Hong 1995-ben, A.Markova 1995-ben, R.Mesiar 1996-ban és 1997-ben, B. De Baets és A. Markova 1996-ban.*

4.3 Nguyen tételének az általánosítása

1991-ben Keresztfalvi Tiborral közösen sikerült kiterjesztenünk Nguyen 1978-as *Journal of Mathematical Analysis and Applications*-beli eredményét (ami a *Meghatározások* szekcióban a Tétel 3.3 néven szerepel) olyan függvényekre is, amelyek az eredeti sup-min kiterjesztési elv (7) helyett a sup-t-norma konvolúcióval (12) lettek definiálva.

Tétel 4.12 *[8]* **[Fullér és Keresztfalvi, 1991]**
Legyenek X, Y és Z nemüres halmazok, legyen T egy t-norma, és legyen $f\colon X \times Y \to Z$ egy kétváltozós függvény. Ha $A \in \mathcal{F}(X)$ és $B \in \mathcal{F}(Y)$, akkor az

$$[f(A,B)]^{\alpha} = \bigcup_{T(\xi,\eta)\geq\alpha} f([A]^{\xi},[B]^{\eta}),\ \alpha \in (0,1], \tag{57}$$

egyenlőség fennállásának szükséges és elégséges feltétele, hogy minden $z \in Z$-re a

$$\sup_{f(x,y)=z} T(A(x),B(y))$$

felvevődjék. Itt

$$f([A]^{\xi},[B]^{\eta}) = \{f(x,y) \mid x \in [A]^{\xi}, y \in [B]^{\eta}\}$$

és $f(A,B) \in \mathcal{F}(Z)$ a $\sup -T$ konvolúcióval van definiálva a (12) szerint.

A következő tétel azt mutatja, hogy a (57) egyenlőség fennáll minden felülről félig folytonos T-re és folytonos f-re a kompakt tartójú fuzzy halmazok családjában.

Tétel 4.13 *[8]* **[Fullér és Keresztfalvi, 1991]**
Legyenek X, Y és Z lokálisan kompakt topologikus terek, legyen T egy felülről félig folytonos t-norma, és legyen $f\colon X \times Y \to Z$ egy folytonos függvény. Ha $A \in \mathcal{F}(X)$ és $B \in \mathcal{F}(Y)$ kompakt tartójuak, akkor

$$[f(A,B)]^{\alpha} = \bigcup_{T(\xi,\eta)\geq\alpha} f([A]^{\xi},[B]^{\eta}),\ \alpha \in (0,1].$$

Példa 4.1 *Legyen $T(x,y) = xy$ a szorzat norma. Ha $A, B \in \mathcal{F}$, és $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor az*

$$[f(A,B)]^{\alpha} = \bigcup_{\xi,\in[\alpha,1]} f([A]^{\xi},[B]^{\alpha/\xi}),\ \alpha \in (0,1],$$

egyenlőség fennáll.

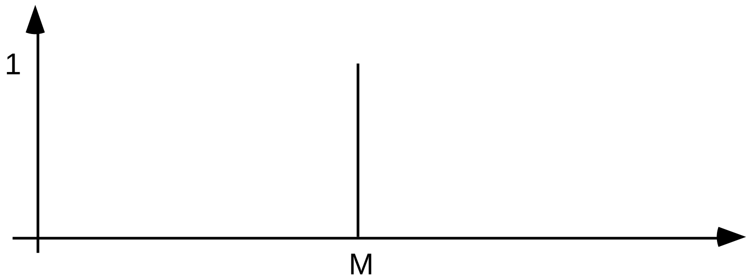

Figure 20: A aritmetikai közép határeloszlása, ha $T \leq H_0$.

4.4 A nagy számok törvényei fuzzy számokra

A fuzzy aritmetikában elért eredményeim lehetővé tették a fuzzy számok aritmetikai közepeinek a vizsgálatát különböző t-normák esetén [10, 12, 18].

A következő tétel - amelyet a nagy számok Csebisev-féle törvényének (lásd Tétel 3.4 a *Meghatározások* szekcióban) a fuzzy analógjának is nevezhetünk - azt mondja ki, hogy ha a számtani közepet definiáló t-norma elég kicsi, akkor a szimmetrikus fuzzy számok számtani közepei a centrumaik számtani közepéhez konvergálnak a szükségszerűségi mértékben.

Tétel 4.14 *[12]* **[Fullér, 1992]**

Legyen az aritmetikai közepet definiáló T t-norma gyengébb mint H_0, azaz álljon fel a

$$T(a,b) \leq H_0(a,b) = \frac{ab}{a+b-ab}$$

összefüggés minden $a, b \in [0,1]$ esetén. Ha $\xi_1 = (M_1, \alpha)$, $\xi_2 = (M_2, \alpha), \ldots$ szimmetrikus háromszögalakú fuzzy számok és

$$M = \lim_{n\to\infty} \frac{M_1 + \cdots + M_n}{n}$$

létezik, akkor tetszőleges $\epsilon > 0$ konstans esetére fennállnak a

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Nes}\left(m_n - \epsilon \leq \frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{n} \leq m_n + \epsilon\right) = 1$$

$$\mathit{Nes}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\xi_1 + \cdots \xi_n}{n} = M\right) = 1$$

összefüggések, ahol, $m_n = (M_1 + \cdots + M_n)/n$ és Nes a szükségszerűséget (17) jelenti.

A következő tétel azt mutatja, hogy ha a számtani közepet a klasszikus minimum normával definiáljuk, (ami nem gyengébb mint a H_0 norma) akkor a szimmetrikus fuzzy számok számtani közepei nem konvergálnak a centrumaik számtani közepéhez a szükségszerűségi mértékben. Az azonban mindig igaz, hogy a lehetőségi mértékben konvergálnak (mivel a számtani közép centruma a centrumok számtani közepe).

Tétel 4.15 *[12]* **[Fullér, 1992]**
Definiáljuk aritmetikai közepet a minimum normával a (7) értelmében, és legyen $\xi_i = (M_i, \alpha),\ i \in \mathbf{N}$. *Ekkor,*

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Nes}\left(m_n - \epsilon \le \frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{n} \le m_n + \epsilon\right) = \frac{\epsilon}{\alpha}$$

$$Nes\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\xi_1 + \cdots \xi_n}{n} = M\right) = 0.$$

Tehát, ha ϵ *elég kicsi, akkor* ϵ/α *tetszőlegesen kicsivé tehető.*

Megjegyzés 4.7 *Speciálisan, ha az aritmetikai közepet a* $H_1(a, b) = ab$ *szorzat normával (ami geyngébb mint a* H_0 *norma) definiáljuk, akkor*

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Nes}\left(m_n - \epsilon \le \frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{n} \le m_n + \epsilon\right) =$$

$$1 - \left(\frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{n}\right)(m_n - \epsilon) = 1 - \lim_{n\to\infty}(1 - \epsilon/\alpha)^n = 1$$

Megjegyzés 4.8 *A (4.14) tételemet 1993-ban E.Triesch javította meg, 1996-ban pedig D.H.Hong és Y.M.Kim általánosította Banach terekre.*

4.5 Approximate Reasoning

H.-J.Zimmermannal bebizonyítottuk [11, 20] a következtetés Zadeh-féle kompoziciós szabályának (25) folytonossági és stabilitási tulajdonságait. Legyenek $P, P' \in \mathcal{F}$ és $W\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, 1]$. Tekintsük a következő két okoskodási sémát:

előfeltétel	x az P	előfeltétel	x az P'
tény	x és y az W	tény	x és y az W
következmény	y az Q	következmény	y az Q'

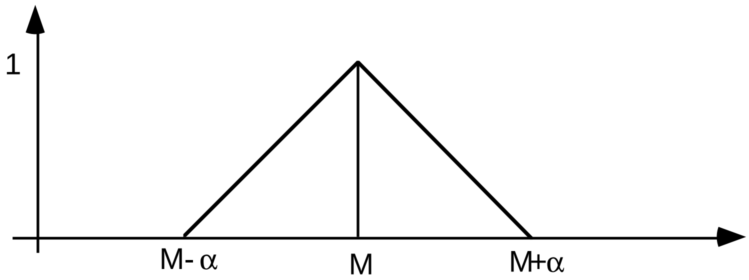

Figure 21: A minimum normával definiálva aritmetikai közép határeloszlása.

ahol a $Q, Q' \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ következményeket a P és az W $\sup -T$ kompoziciójával

$$Q = P \circ W, \quad Q' = P' \circ W \tag{58}$$

definiáljuk.

A következő tétel azt mondja ki, hogy ha kis eltérés van P és P' között, akkor kis eltérés lesz Q és Q' között is (stabilitási tulajdonság).

Tétel 4.16 *[11]* **[Fullér és Zimmermann, 1991]**
Legyen $\delta \geq 0$, legyen továbbá T egy folytonos t-norma és $P, P' \in \mathcal{F}$. Ha

$$D(P, P') \leq \delta$$

akkor

$$\sup_{y \in \mathbb{R}} |Q(y) - Q'(y)| \leq \omega(T, \max\{\omega(P, \delta), \omega(P', \delta)\}).$$

ahol Q és Q' a (58) szerint van definiálva, és D jelöli a fuzzy számok Hausdorff távolságát (13).

A következő tétel azt mondja ki, hogy ha az x és y változót egybekötő W fuzzy reláció tartalmazási függvénye folytonos, akkor a következmény, Q, tartalmazási függvénye szintén folytonos lesz.

Tétel 4.17 *[11]* **[Fullér és Zimmermann, 1991]**
Legyen $\delta \geq 0$, legyen továbbá T egy folytonos t-norma és legyen W egy folytonos fuzzy reláció $\mathbb{R}$-en. Ekkor, a $Q \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ tartalmazási függvénye folytonos és $\omega(Q, \delta) \leq \omega(T, \omega(W, \delta))$.

1992-ben Brigitte Wernerssel [17] a 4.16 és 4.17 tételeket kiterjesztettük olyan okoskodási sémákra is, amelyekben az x és y változók egynél több fuzzy relációval vannak egybekötve.

Tekintsük a következő két okoskodási sémát:

előfeltétel	x az P	előfeltétel	x az P'
tény	x és y az W_1	tény	x és y az W_1
...	...	...	...
tény	x és y az W_m	tény	x és y az W_m
következmény	y az Q	következmény	y az Q'

ahol a $Q, Q' \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ következményeket a

$$Q = \bigcap_{i=1}^{m} P \circ W_i, \quad Q' = \bigcap_{i=1}^{m} P' \circ W_i \tag{59}$$

formulákkal definiáljuk.

Tétel 4.18 *[17]* **[Fullér és Werners, 1992]**
Legyen $\delta \geq 0$, legyen továbbá T egy folytonos t-norma és $P, P' \in \mathcal{F}$. Ha

$$D(P, P') \leq \delta$$

akkor

$$\sup_{y \in \mathbb{R}} |Q(y) - Q'(y)| \leq \omega(T, \max\{\omega(P, \delta), \omega(P', \delta)\}).$$

ahol Q és Q' a (59) szerint van definiálva, és D jelöli a fuzzy számok Hausdorff távolságát (13).

Tétel 4.19 *[17]* **[Fullér és Werners, 1992]**
Legyen $\delta \geq 0$, legyen továbbá T egy folytonos t-norma és legyen W_i folytonos fuzzy reláció $\mathbb{R}$-en, $i = 1, \dots, m$. Ekkor a $Q \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ tartalmazási függvénye folytonos és

$$\omega(Q, \delta) \leq \omega(T, \omega(\delta))$$

ahol $\omega(\delta) = \max\{\omega(W_1, \delta), \dots, \omega(W_m, \delta)\}$.

1993-ban H.J.Zimmermannal [20] a 4.18 és 4.19 tételeket kimondtuk az olyan általánosított modus ponensre (27) okoskodási sémákra is, amelyekben az x és y változók egynél több fuzzy implikációval vannak egybekötve (28).

1990-ben Hans Hellendoorn [50] megmutatta a következtetés Zadeh-féle $\sup - \min$ kompoziciós szabályának a zártságát és egzakt formulákat származtatott a következmény tartalmazási függvényére, abban az esetben, ha az előfeltétel és a reláció is ϕ-függvényekkel vannak adva.

1992-ben H.J.Zimmermannal [15] sikerült kiterjesztenünk Hellendoorn eredményeit a $\sup -T$ konvolúcióval definiált következtetési szabályra is.

A ϕ-függvények nem mások mint LR-típusu fuzzy számok, csak más paraméterezéssel, azaz a

$$\phi(x;a,b,c,d) = \begin{cases} 1 & \text{if } b \leq x \leq c \\ \phi_1\left(\dfrac{x-a}{b-c}\right) & \text{if } a \leq x \leq b,\ a < b, \\ \phi_2\left(\dfrac{x-c}{d-c}\right) & \text{if } c \leq x \leq d,\ c < d, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ahol $\phi_1, \phi_2\colon [0,1] \to [0,1]$, folytonos, monoton növekvő függvények, amelyek kielégítik a $\phi_1(0) = \phi_2(1) = 0$ és $\phi_1(1) = \phi_2(0) = 0$ peremfeltételeket, egy olyan fuzzy szám, amelyik tartója az $[a,d]$ intervallum, a-tól b-ig monoton nő, egyet vesz fel a $[b,c]$-ben és monoton csökken a $[c,d]$-n.

Tétel 4.20 *[15]* **[Fullér és Zimmermann, 1992]**
Legyen T egy archimedeszi t-norma az f additiv generátorral és legyenek $P(x) = \phi(x;a,b,c,d)$ illetve $W(x,y) = \phi(y-x;a+u,b+u,c+v,d+v)$. Ha ϕ_1 és ϕ_2 kétszer differenciálható, konkáv függvények és f kétszer differenciálható szigorúan konvex függvény, akkor Q a következő alakú

$$Q(y) = \begin{cases} 1 & \textit{if } 2b+u \leq y \leq 2c+v \\ f^{[-1]}\left(2f\left(\phi_1\left[\dfrac{y-2a-u}{2(b-a)}\right]\right)\right) & \textit{if } 2a+u \leq y \leq 2b+u \\ f^{[-1]}\left(2f\left(\phi_2\left[\dfrac{y-2c-v}{2(d-c)}\right]\right)\right) & \textit{if } 2c+v \leq y \leq 2d+v \\ 0 & \textit{otherwise} \end{cases}$$

ahol Q-t a P és a W $\sup -T$ kompoziciójával (26) definiáltuk.

1993-ban H.J.Zimmermannal [19] bebizonyítottuk, hogy a fuzzy matematikai programozási (FMP) feladatokat úgy lehet tekinteni mint a fuzzy okoskodási sémák (MFR) speciális esetei, ahol az FMP célfüggvénye az MFR előfeltétele, és az FMP korlátozásai az MFR szabályaival azonosíthatóak. Ezt az elvet aztán 1994-ben

C. Carlssonnal [26] terjesztettük ki fuzzy lineáris többcélfüggvényű matematikai programozási feladatokra.

1992-ben Mario Fedrizzivel [13] beláttuk, hogy ha csoportos döntések elméletében a szituációkat fuzzy szabályokkal modellezzük, akkor kis eltérések a csoport tagjainak a véleményében (ahol a ”vélemények” fuzzy számokkal vannak reprezentálva) kis eltérést eredményeznek csak a közös döntésben (azaz a konszenzusban). 1993-ban Luisa Mich-hel [22] egy egyfázisu fuzzy okoskodási sémát vezettünk be a csoportos döntési problémákban a konszenzus modellezésére.

4.6 Lehetőség és szükségszerűség a súlyozott aggregációkban

Ronald R. Yager 1993-ban és 1994-ben [57, 58] a t-normák és t-konormák használatát javasolta azokban a többkritériumu döntési problémákban, amelyekben a kritériumok nem egyenranguak, hanem különböző fontosságuak, amiket a hozzájuk rendelt súlyokkal adunk meg.

1995-ben Christer Carlssonnal [30] és 1997-ben Christer Carlssonnal és Szvetlana Fullérral közösen [40] sikerült egy olyan általános módszert adnunk a súlyozott aggregáció problémájára, amelynek a Yager-féle megközelités egy speciális esete.

Legyen **Agg** egy aggregációs operátor, jelölje $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ az aggregálandó értékeket, és legyenek $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ a súlyok. Az A súlyozott aggregációját az

$$\mathbf{Agg}\,\langle g(w_1, a_1), \dots, g(w_n, a_n)\rangle. \tag{60}$$

függvénnyel értelmezzük, ahol g kielégiti a következő feltételeket

- ha $a > b$ ha $g(w, a) \geq g(w, b)$
- $g(w, a)$ monoton w-ben
- $g(0, a) = id,\ g(1, a) = a$

ahol az identitás elem id, úgy van választva, hogy hozzávéve azt az aggregálandó elemekhez, nem változtat semmit sem a végeredményen. 1997-ben a [40] cikkben a $g(w_i, a_i) = w_i \to a_i$ függvényt javasoltuk a g függvény definiálására. Azaz

$$\mathbf{Agg}\,\langle g(w_1, a_1), \dots, g(w_n, a_n)\rangle = \mathbf{Agg}\langle w_1 \to a_1, \dots, w_n \to a_n\rangle. \tag{61}$$

ahol a $\to$ az egy fuzzsy implikációt jelöl. Belátható [40], hogy (61) a $\min$ aggregációs operátorral és a Kleene-Dienes-féle implikációval (3) a Yager által az [57, 58]-ben bevezetett aggregációs operátorokat adja.

A (61) formulával adott megközelítés a minimum aggregációs operátorral és a Gödel implikációval (4) azt az elvet valósítja meg, hogy ”egy alternatíva összteljesítménye akkor kiváló, ha ha minden kritériumot legalább olyan mértékben elégít ki mint amekkora a kritérium súlya”.

4.7 Kölcsönös függőségek vizsgálata a többkritériumu döntési problémákban

1947-ben John von Neumann és Oskar Morgenstern a *Theory of Games and Economic Behavior* cimű könyvükben tárgyalta a kölcsönös függőség (*interdependence*) problémáját a társadalmi cseregazdaságban. Annak az esetnek a tárgyalásakor, amikor két vagy több személy cseréli a javakat a következőket irták ([54], 11. oldal):

> ... then the results for each one will depend in general not merely upon his own actions but on those of others as well. Thus each participant attempts to maximize a function ... of which he does not control all variables. This is certainly no maximum problem, but a peculiar and disconcerting mixture of several conflicting maximum problems. Every participant is guided by another principle and neither determines all variables which affects his interest.
>
> This kind of problem is nowhere dealt with in classical mathematics. We emphasize at the risk of being pedantic that this is no conditional maximum problem, no problem of the calculus of variations, of functional analysis, etc. It arises in full clarity, even in the most ”elementary” situations, e.g., when all variables can assume only a finite number of values.

Később, többek között, Milan Zeleny [61] is felimeri a függőségek problémáját, azonban a matematikai modellezésük csak Christer Carlsson 1982-83-as [46, 47] munkáival kezdődtek meg.

1994-től kezdve Christer Carlssonnal közösen sok munkában foglalkoztunk a függőségek reprezentálási problémáival a különböző típusu döntési problémákban (lásd [23, 27, 28, 29, 33, 37, 42, 44]).

Arról van szó, hogy nagyon sokszor a matematikai modellünket elégtelen és/vagy bizonytalan információkra hagyatkozva kell felépítenünk és egyrészt szeretnénk a meglévő információkat a leghatékonyabb formában megjeleníteni, másrészt következtetéseket levonni belőlük a tudásbázisunkban nem szereplő szituációkra.

Tegyük fel, hogy olyan portfóliót kezelünk, aminek a mindenkori értéke erősen függ a valuták egymásközti árfolyamának az ingadozásaitól. Nagyon fontos ilyenkor annak a megbecslése, hogy az árfolyamváltozások mennyire érintik a portfóliónk értékét.

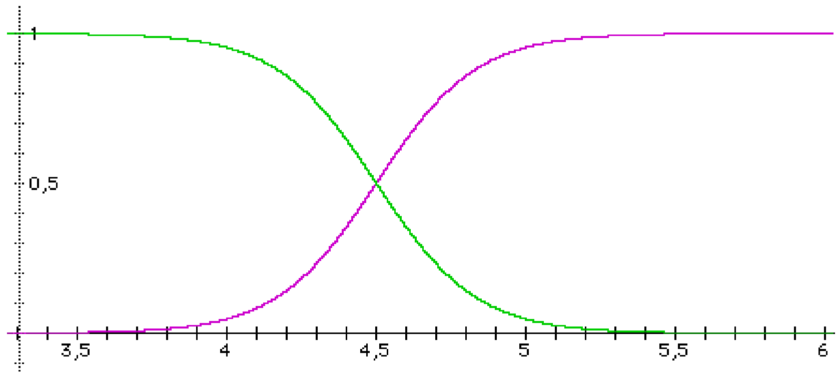

Figure 22: Induló tartalmazási függvények az ”USD/FIM alacsony” és az ”USD/FIM magas” fuzzy számokra, $b_3 = 6$ and $c_3 = 4.5$.

1996-ban Christer Carlssonnal [36] egy neuro-fuzzy megközelítést javasoltunk az ilyen típusu portfoliók értékéinek a megbecslésére.

A neurális hálozattal approximáljuk a páronkénti árfolyamokat megjelenítő fuzzy számokat. Mivel a szigmoid típusu aktivizáló függvénnyel definiált és legalább egy rejtett szintű neurális hálózatok univerzális approximátorok (Funahashi, 1989) ezért - feltételezve, hogy a portfóliónk értéke folytonosan függ az árfolyamoktól - elég sok konkrét eset ismeretéből jó következtetéseket tudunk levonni a tudásbázisunkban nem szereplő esetekre.

Illusztrációként tegyük fel, hogy a tudásbázisunkat a következő három fuzzy szabály alkotja:

$\Re_1$: Ha az US dollár gyenge a német márkával a svéd koronával és a finn márkával szemben, akkor a portfóliónk értéke nagyon nagy.

$\Re_2$: Ha az US dollár erős a német márka és a svéd korona ellenében és az US dollár gyenge a finn márkával szemben, akkor a portfóliónk értéke nagy.

$\Re_3$: Ha az US dollár erős a német márkával a svéd koronával és a finn márkával szemben, akkor a portfóliónk értéke kicsi.

Majd felvesszük az induló szigmoid típusu tartalmazási függvényeket az L_1 = ”USD/DEM alacsony”, H_1 = ”USD/DEM magas”, L_2 = ”USD/SEK alacsony”, H_2 = ”USD/SEK magas”, L_3 = ”USD/FIM alacsony” és H_3 = ”USD/FIM magas”

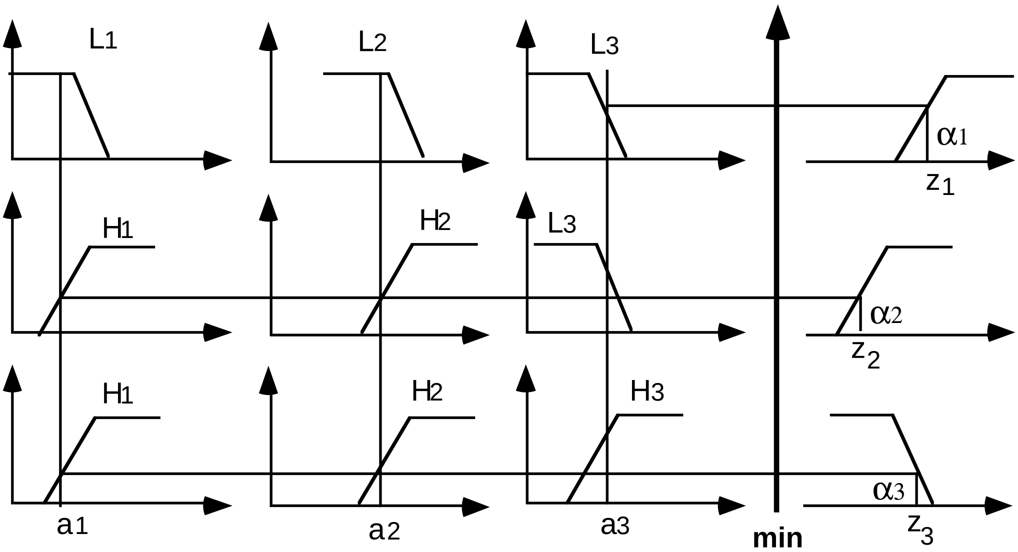

Figure 23: A Tsukomoto-féle okoskodási séma.

tulajdonságok leírására:

$$L_i(t) = \frac{1}{1+\exp(b_i(t-c_i))}, \quad H_i(t) = \frac{1}{1+\exp(-b_i(t-c_i))}, \; i = 1, 2, 3.$$

Az ”USD/FIM alacsony” és ”USD/FIM magas” fuzzy halmazok kezdeti tartalmazási függvényét a 22-es ábra mutatja.

A Tsukomoto-féle fuzzy okoskodási sémát alkalmazzuk a következtetések levonására az

$$\Re = \{\Re_1, \Re_2, \Re_3\}$$

szabálybázisból, azaz a rendszer outputját a

$$z_0 = \frac{\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}$$

formula definiálja, ahol a_1, a_2 és a_3 (lásd a 23-as ábrát) jelentik az USD/DEM, USD/SEK és az USD/FIM árfolyamokat.

Legyen adva a következő trenírozó halmaz (*training set*)

$$\{(x_1, y_1), \ldots, (x_K, y_K)\}$$

ahol x_k az aktuális árfolyamok vektora és y_k a portfóliónk valós értéke a k-dik időpontban.

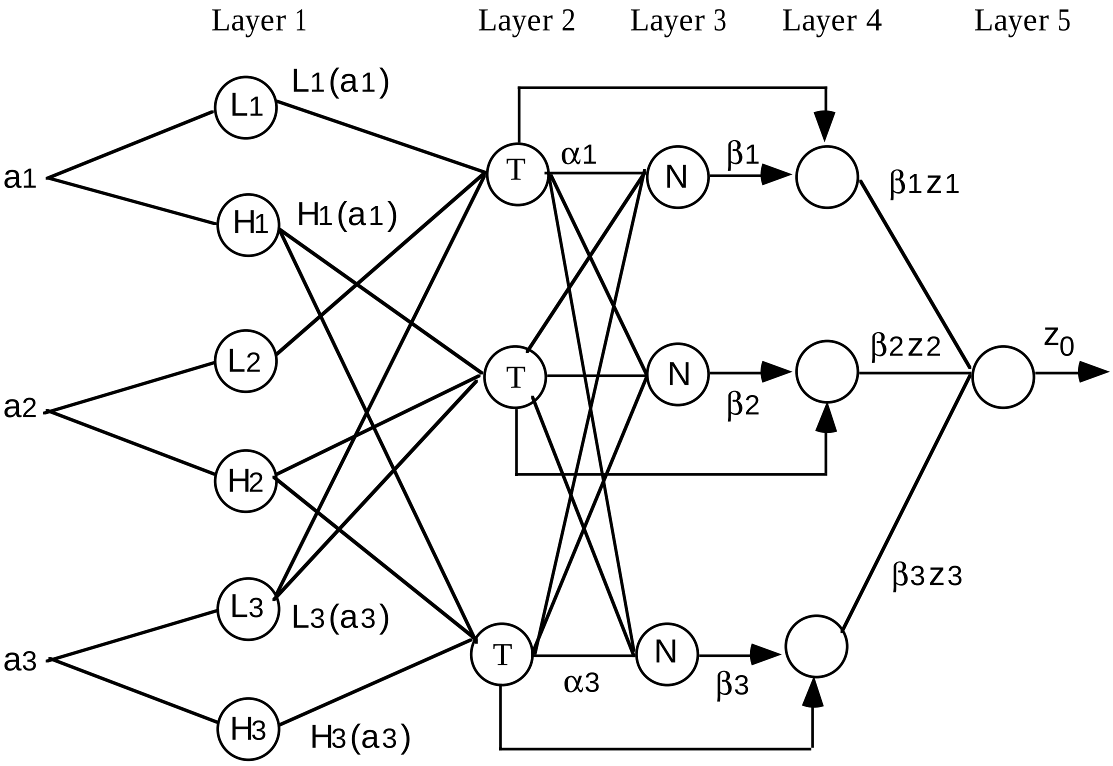

Figure 24: Hybrid neurális hálózat [51] a Tsukomato-féle okoskodási sémára.

Megszerkesztjük a Tsukomoto-féle okoskodási sémát megvalósító ANFIS (Adaptive Fuzzy Inference System) architektúrát (lásd a 24-es ábrát), és az *error backpropagation* tanulási algoritmus segítségével meghatározzuk a $\{b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3\}$ paraméterek legjob értékeit (azokat amelyek mellett a neurális hálózat számított outpuja a lehető legközelebb van a megkívánt outputhoz a trenírozó halmaz minden pontjában).

5 Összegzés

Az első 4 szekció eredményei főleg az A.N.Tyihonov tanácsánál megvédett kandidátusi értekezésemben megkezdett munkán és a Mario Fedrizzivel folytatott együttműködésen alapulnak. Ezeknek az eredményeknek a kiindulópontja Kovács Margit 1988-ban megjelent cikke, amelyben a világon először vetette fel a fuzzy kiterjesztések esetleges regularizácós képességét az eredeti problémára nézve, és egy egyszerű esetben bizonyította a kiterjesztett probléma megoldásának a stabilitását. Ezek a szekciók tartalmazzák a Keresztfalvi Tiborral közösen elért eredményeinket is, akinek az egyetemi doktori értekezésének a témavezetője voltam.

Az 5. szekcióban felsorolt eredmények főleg a H.-J.Zimmerman mellett Aachenben töltött 2 év munkájából származnak. A 6. és 7. szekció pedig a Christer Carlssonnal folytatott immár 5 éves tudományos együttműködés eredményeit tartalmazza.

References

[1] R.Fullér, On stability in fuzzy linear programming problems, *Fuzzy Sets and Systems*, 30(1989) 339-344. **[MR 90c:90143] [Zbl.704.90101]**

[2] M.Kovács, F.P.Vasiljev and R.Fullér, On stability in fuzzified linear equality systems, *Proceedings of the Moscow State University*, Ser. 15, 1(1989), 5-9 (in Russian), translation in *Moscow Univ. Comput. Math. Cybernet.*, 1(1989), 4-9. **[MR 91c:94039] [Zbl.651-65028]**

[3] M.Kovács and R.Fullér, On fuzzy extended systems of linear equalities and inequalities, in: A.A.Tihonov and A.A.Samarskij eds., *Current Problems in Applied Mathematics*, Moscow State University, 1989 73-80 (in Russian). **[MR: 90m:65097] [Zbl.709.15004]**

[4] R.Fullér, Well-posed fuzzy extensions of ill-posed linear equality systems, *BUSEFAL*, 37(1989) 62-69. **[Zbl.668-90053]**

[5] R.Fullér, The law of large numbers for fuzzy numbers, *BUSEFAL*, 40(1989) 25-32. **[Zbl.694-60024]**

[6] R.Fullér, On stability in possibilistic linear equality systems with Lipschitzian fuzzy numbers, *Fuzzy Sets and Systems*, 34(1990) 347-353. **[MR 91a:15029]**,
[Zbl.696-15003]

[7] R.Fullér, On product-sum of triangular fuzzy numbers, *Fuzzy Sets and Systems*, 41(1991) 83-87. **[MR 92c:04008] [Zbl.725-04002]**

[8] R.Fullér and T.Keresztfalvi, On generalization of Nguyen's theorem, *Fuzzy Sets and Systems*, 41(1991) 371-374. **[MR 92g:04009] [Zbl.755.04004]**

[9] R.Fullér, On Hamacher-sum of triangular fuzzy numbers, *Fuzzy Sets and Systems*, 42(1991) 205-212. **[MR 92d:04003] [Zbl.734.04004]**

[10] R.Fullér, On law of large numbers for L-R fuzzy numbers, in: R.Lowen and M.Roubens eds., *Proceedings of the Fourth IFSA Congress, Vol. Mathematics*, Brussels, 1991 74-77.

[11] R.Fullér and H.-J.Zimmermann, On Zadeh's compositional rule of inference, in: R.Lowen and M.Roubens eds., *Proceedings of the Fourth IFSA Congress, Vol. Artifical intelligence*, Brussels, 1991 41-44.

[12] R.Fullér, A law of large numbers for fuzzy numbers, *Fuzzy Sets and Systems*, 45(1992) 299-303. **[MR 92j:04003] [Zbl. 748-60003]**

[13] M.Fedrizzi and R.Fullér, Stability in possibilistic linear programming problems with continuous fuzzy number parameters, *Fuzzy Sets and Systems*, 47(1992) 187-191. **[MR: 93g:90088] [Zbl.808.90130]**

[14] R.Fullér and T.Keresztfalvi, t-Norm-based addition of fuzzy intervals, *Fuzzy Sets and Systems*, **51**(1992) 155-159. **[MR: 93k:04004]**

[15] R.Fullér and H.-J.Zimmermann, On computation of the compositional rule of inference under triangular norms, *Fuzzy Sets and Systems*, **51**(1992) 267-275.
[MR: 93k:03026], **[Zbl.782.68110]**

[16] M.Fedrizzi and R.Fullér, On stability in group decision support systems under fuzzy production rules, in: R.Trappl ed., *Proceedings of the Eleventh European Meeting on Cybernetics and Systems Research*, World Scientific Publisher, London, 1992, Vol.1. 471-478.

[17] R.Fullér and B.Werners, The compositional rule of inference with several relations, in: B.Riecan and M.Duchon eds., *Proceedings of the international Conference on Fuzzy Sets and its Applications*, Liptovsky Mikulás, Czecho-Slovakia, February 17-21, 1992, Math. inst. Slovak Academy of Sciences, Bratislava, 1992 39–44. **[Zbl.788.68132] [CMP 1230460]**

[18] R.Fullér and E.Triesch, A note on law of large numbers for fuzzy variables, *Fuzzy Sets and Systems*, 55(1993) 235-236. **[Zbl.782.60004] [CMP 1215144]**

[19] R.Fullér and H.-J.Zimmermann, Fuzzy reasoning for solving fuzzy mathematical programming problems, *Fuzzy Sets and Systems* 60(1993) 121-133. **[MR: 94k:90148] [Zbl.795.90086]**

[20] R.Fullér and H.-J.Zimmermann, On Zadeh's compositional rule of inference, in: R.Lowen and M.Roubens eds., *Fuzzy Logic: State of the Art*, Theory and Decision Library, Series D, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, 1993 193-200.

[21] P.Eklund and R.Fullér, A neuro-fuzzy approach to medical diagnostics, in: P.Eklund and J.Mattila eds., *Proceedings of Fuzziness in Finland'93 Workshop*, Åbo Akademis Tryckeri, Åbo, 1993 19-22; **also** in:*Proceedings of EUFIT'93 Conference*, September 7-10, 1993, Aachen, Germany, Verlag der Augustinus Buchhandlung, Aachen, 1993 810-813; **also** in: *Fuzzy Systems & A. I.*, **3**(1994) 53-56.

[22] R.Fullér and L.Mich, Fuzzy reasoning techniques for GDSS, in: *Proceedings of EUFIT'93 Conference*, September 7-10, 1993 Aachen, Germany, Verlag der Augustinus Buchhandlung, Aachen, 1993 937-940.

[23] C.Carlsson and R.Fullér, Interdependence in fuzzy multiple objective programming, *Fuzzy Sets and Systems* 65(1994) 19-29. **[MR: 95e:90124]**

[24] R.Fullér and M.Fedrizzi, On stability in multiobjective possibilistic linear programs, *European Journal of Operational Research*, 74(1994) 179-187. **[Zbl.803.90131]**

[25] P.Eklund, M.Fedrizzi and R.Fullér, Stability in multiobjective possibilistic linear programs with weakly noninteractive fuzzy number coefficients, in: M.Delgado, J.Kacprzyk, J.L.Verdegay and M.A.Vila eds., *Fuzzy Optimization: Recent Advances*, Lect. Notes Econ. Math. Syst. 368, (Physica-Verlag, Heidelberg, 1994) 246-252. **[CMP 1315069] [Zbl.823.90137]**

[26] C.Carlsson and R.Fullér, Fuzzy reasoning for solving fuzzy multiple objective linear programs, in: R.Trappl ed., *Cybernetics and Systems '94, Proceedings of the Twelfth European Meeting on Cybernetics and Systems Research*, World Scientific Publisher, London, 1994, vol.1, 295-301.

[27] C.Carlsson and R.Fullér, Fuzzy if-then rules for modeling interdependencies in FMOP problems, in: *Proceedings of EUFIT'94 Conference*, September 20-23, 1994 Aachen, Germany, Verlag der Augustinus Buchhandlung, Aachen, 1994 1504-1508.

[28] C.Carlsson and R.Fullér, Multiple Criteria Decision Making: The Case for Interdependence, *Computers & Operations Research* 22(1995) 251-260.

[29] C.Carlsson and R.Fullér, On linear interdependences in MOP, in: *Proceedings of CIFT'95*, June 8-10, 1995, Trento, Italy, University of Trento, 1995 48-52.

[30] C.Carlsson and R.Fullér, On fuzzy screening system, in: *Proceedings of EUFIT'95 Conference*, August 28-31, 1995 Aachen, Germany, Verlag Mainz, Aachen, 1995 1261-1264.

[31] C.Carlsson and R.Fullér, Active DSS and approximate reasoning, in: *Proceedings of EUFIT'95 Conference*, August 28-31, 1995 Aachen, Germany, Verlag Mainz, Aachen, 1995 1209-1215.

[32] R.Fullér, *Neural Fuzzy Systems*, Åbo Akademis tryckeri, Åbo, 1995, 249 pages.
[ISSN 0358-5654, ISBN 951-650-624-0]

[33] C.Carlsson and R.Fullér, Fuzzy multiple criteria decision making: Recent developments, *Fuzzy Sets and Systems*, 78(1996) 139-153. **[CMP 1379383]**

[34] E. Canestrelli, S.Giove and R.Fullér, Sensitivity analysis in possibilistic quadratic programming, *Fuzzy Sets and Systems*, 82(1996) 51-56. **[CMP 1403052]**

[35] R.Fullér, OWA operators for decision making, in: C.Carlsson ed., *Exploring the Limits of Support Systems*, TUCS General Publications, No. 3, Åbo, 1996 85-104.

[36] C.Carlsson and R.Fullér, A neuro-fuzzy system for portfolio evaluation, in: R.Trappl ed., *Cybernetics and Systems '96, Proceedings of the Thirteenth European Meeting on Cybernetics and Systems Research*, Austrian Society for Cybernetic Studies, Vienna, 1996 296-299.

[37] C.Carlsson and R.Fullér, Compound interdependences in MOP, in: *Proceedings of EUFIT'96 Conference*, September 2-5, 1996, Aachen, Germany, Verlag Mainz, Aachen, 1996 1317-1322.

[38] R.Fullér, Hyperknowledge representation: challenges and promises, in: P.Walden, M.Brännback, B.Back and H.Vanharanta eds., *The Art and Science of Decision-Making*, Åbo Akademi University Press, Åbo, 1996 61-89.

[39] C.Carlsson and R.Fullér, Adaptive Fuzzy Cognitive Maps for Hyperknowledge Representation in Strategy Formation Process, in: *Proceedings of International Panel Conference on Soft and Intelligent Computing*, Technical University of Budapest, 1996 43-50.

[40] C.Carlsson, R.Fullér and S.Fullér, Possibility and necessity in weighted aggregation, in: R.R.Yager and J.Kacprzyk eds., *The ordered weighted averaging operators: Theory, Methodology, and Applications*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1997 18-28.

[41] C.Carlsson, R.Fullér and S.Fullér, OWA operators for doctoral student selection problem, in: R.R.Yager and J.Kacprzyk eds., *The ordered weighted averaging operators: Theory, Methodology, and Applications*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1997 167-178.

[42] C.Carlsson and R.Fullér, Interdependence in Fuzzy MCDM, in: *Proceedings of First International Workshop on Preferences and Decisions*, Trento, June 5-7, 1997, University of Trento, 1997 7-10.

[43] C.Carlsson and R.Fullér, OWA operators for decision support, in: *Proceedings of EUFIT'97 Conference*, September 8-11, 1997 Aachen, Germany, Verlag Mainz, Aachen (to appear).

[44] C.Carlsson and R.Fullér, Problem solving with multiple interdependent criteria, in: J.Kacprzyk, H.Nurmi and M.Fedrizzi eds., *Consensus under Fuzziness*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1997 (to appear).

[45] R.A.Bellman and L.A.Zadeh, Decision-making in a fuzzy environment, *Management Sciences*, Ser. B 17 (1970) 141-164.

[46] C.Carlsson, Tackling an MCDM-problem with the help of some results from fuzzy sets theory, *European Journal of Operational Research*, 3(1982) 270-281.

[47] C.Carlsson, An approach to handle fuzzy problem structures, *Cybernet. and Systems*, 14(1983) 33-54.

[48] P.L.Chebyshev, On mean quantities, *Math. Sb.*, 2(1867); Complete works, 2(1948).

[49] D. Dubois and H. Prade, Additions of Interactive Fuzzy Numbers, *IEEE Transactions on Automatic Control*, (26)1981 926-936.

[50] H.Hellendoorn, Closure properties of the compositional rule of inference, *Fuzzy Sets and Systems*, 35(1990) 163-183.

[51] J.-S. Roger Jang, ANFIS: Adaptive-network-based fuzzy inference system, *IEEE Trans. Syst., Man, and Cybernetics*, 23(1993) 665-685.

[52] M.Kovács, Fuzzification of ill-posed linear systems, in: D.Greenspan and P.Rózsa eds., *Colloquia mathematica societatis János Bolyai 50. Numerical methods (Miskolc, 1986)*, North-Holland, Amsterdam-New York, 1988 521-532.

[53] F. Herrera, J. L. Verdegay, and M. Kovács. A parametric approach for (g,p)-fuzzified linear programming problems, *Journal of Fuzzy Mathematics*, 3(1993) 699–713.

[54] J.von Neumann and O.Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, Princeton 1947.

[55] H.T. Nguyen, A note on the extension principle for fuzzy sets, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 64(1978) 369-380.

[56] B.Schweizer and A.Sklar, Associative functions and abstract semigroups, *Publ. Math. Debrecen*, 10(1963) 69-81.

[57] R.R.Yager, Fuzzy Screening Systems, in: R.Lowen and M.Roubens eds., *Fuzzy Logic: State of the Art*, Kluwer, Dordrecht, 1993 251-261.

[58] R.R.Yager, On weighted median aggregation, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-based Systems*, 1(1994) 101-113.

[59] L.A. Zadeh, Fuzzy Sets, *Information and Control*, 8(1965) 338-353.

[60] L.A. Zadeh, Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes, *IEEE Transanctins on Systems, Man and Cybernetics*, 3(1973) 28-44.

[61] M.Zeleny, *Multiple Criteria Decision Making*, McGraw-Hill, New-York, 1982.